(0)

Quantenmechanik und Gruppentheorie

(mit Anwendung auf relativistische Quantenmechanik)

Einleitung und Zusammenfassung.

[illegible]

DSI

I

I. Teil: Bedeutung der Repräsentation einer physikalischen Größe durch eine Hermite'sche Form

1. Mathematische Grundbegriffe. Hermite'sche Formen.

[illegible]

$\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$|\mathfrak{x}|^2 = x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \ldots + x_n\bar{x}_n$

[illegible]

$\mathfrak{x} = x_1^*\mathfrak{e}_1^* + x_2^*\mathfrak{e}_2^* + \ldots + x_n^*\mathfrak{e}_n^*$

$\mathfrak{e}_i = (0, 0, \ldots 1, 0, \ldots 0)$

[illegible]

$|\mathfrak{x}|^2 = x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \ldots + x_n\bar{x}_n$

[illegible]

$x_i' = \sum_k e_{ik} x_k, \quad x_k = \sum_i e_{ik} x_i'$

[illegible]

$x_k' = \sum e_{ik} x_i$

$\mathfrak{x}' = \mathfrak{x}\,\mathfrak{E}$, $\mathfrak{x}'' = \mathfrak{x}'\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{x}'' = \mathfrak{x}(\mathfrak{E}\mathfrak{E}')$

$\mathfrak{E} = \|e_{ik}\|$, $\mathfrak{E}' = \|e_{ik}'\|$

$\sum_r e_{ir} e_{rk}'$

$\mathfrak{x} = \sum x_i \mathfrak{e}_i$

[illegible]

$(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \ldots + x_n\bar{y}_n$

[illegible]

$\mathfrak{E}, \mathfrak{E}^*$ [illegible] $\mathfrak{E}^* = \varepsilon\,\mathfrak{E}$

[illegible]

[illegible] (Formen, [illegible])

$$A(x) = \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}\, x_i \bar{x}_k ,$$

[illegible] a_{ik} [illegible] $a_{ki} = \bar{a}_{ik}$ [illegible] $\bar{A}^* = A$ [illegible] $\|a_{ik}\|$ [illegible]

$$A(x, y) = \sum_{ik} a_{ik}\, x_i \bar{y}_k .$$

[illegible] $A(y, x) = \overline{A(x, y)}$ [illegible] $A(x) = A(x)$ [illegible] $A = \|a_{ik}\|$ [illegible] $A^* = A$.

[illegible] $x' = xA$ [illegible] $(x'y) = A(x\,y)$ [illegible]

[illegible]

1) $A(x) = a_1 x_1 \bar{x}_1 + a_2 x_2 \bar{x}_2 + \dots + a_3 x_3 \bar{x}_3$

2. [illegible] $a_1, a_2, \dots, a_3$ [illegible] $a_1 = a_2 = a_3 = a$ [illegible] a_1, a_2, a_3 [illegible] $R(a)$ [illegible] $x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3$ [illegible] a, a' [illegible] $R(a)$ [illegible] x_1, x_2, x_3 [illegible]

[illegible] A, B [illegible] $A = \|a_{ik}\|$, $B = \|b_{ik}\|$ [illegible] $AB = BA$ [illegible]

2. Der physikalische Begriff des reinen Falls.

[illegible] Goudsmit [illegible] Uhlenbeck [illegible] $+1, -1$ [illegible] $\frac{h}{4\pi}$ [illegible] $\sigma_x = 4, 1, 0$ [illegible] σ_x [illegible] $-1 + 1$ [illegible] [illegible] $\sigma_x - 1 + 1, -1$ [illegible] $\frac{\vartheta}{2}$ [illegible]

[illegible]

II

[illegible]

[illegible] $\sigma_r = a\,\sigma_x + b\,\sigma_y + c\,\sigma_z$; [illegible]

[illegible] $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ [illegible]

[illegible] $\mu(\mathfrak{H}_x \sigma_x + \mathfrak{H}_y \sigma_y + \mathfrak{H}_z \sigma_z)$; [illegible] $\mu = \frac{eh}{4\pi m c}$ [illegible]

[illegible]

3. Die physikalische Bedeutung der ~~einen~~ ~~Größen~~ repräsentierenden ~~Matrix~~ vermittelten Transf.

[illegible]

Eigenwerte II

[illegible]

$e = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, $A(e) = a_1 x_1 \bar{x}_1 + \dots + a_n x_n \bar{x}_n$

[illegible] $a_1, a_2, \dots, a_n$ [illegible]

$|x_1|^2, |x_2|^2, \dots, |x_n|^2$ [illegible]

[illegible] $a_1 = a_2 = a_3 = a$ [illegible] $R(a)$ [illegible]

$= |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2$ [illegible]

[illegible] $R(a)$ [illegible] $R(a)$, $R(a')$ [illegible]

[illegible]

$a \leq \alpha \leq a'$ [illegible]

[illegible] a_2, a_3, a_4, a_5 [illegible] $= |x_1|^2 + |x_3|^2$

$+ |x_4|^2 + |x_5|^2$ [illegible] Neumann

[illegible] a_2, a_3, a_4, a_5 [illegible]

[illegible] $\alpha, \beta, \dots$ [illegible]

[illegible] a_i [illegible] b_i [illegible]

[illegible] $x_1, x_2, \dots, x_n$ [illegible]

[illegible] Kinematogr[illegible]

III

Zitat

[illegible]

(u_1, u_2) [illegible] $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ [illegible]:

$$\sigma_y = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{Vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{Vmatrix} \qquad \sigma_x = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

[illegible]

$$x_1\bar{x}_2 + x_2\bar{x}_1, \qquad i(x_1\bar{x}_2 - x_2\bar{x}_1) \qquad x_1\bar{x}_1 - x_2\bar{x}_2.$$

[illegible] $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ [illegible] (x_1, x_2) [illegible] (Cayley) [illegible]

[illegible] (x_1, x_2) [illegible] $|x_1|^2$; $|x_2|^2$ [illegible] $\sigma_r = \pm 1$ [illegible] σ_r [illegible]

$$\sigma_r = a\sigma_x + b\sigma_y + c\sigma_z$$

[illegible] $+1$ [illegible]

$$\sigma_r = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ & \end{vmatrix}$$

[illegible] (x_1, x_2) [illegible]

$$s_{11}x_1 + s_{12}x_2 = x_1$$
$$s_{21}x_1 + s_{22}x_2 = x_2$$

[illegible]

$$\begin{cases} a x_1 + (b+ic)\,x_2 = x_1 \\ (b-ic)\,x_1 - a x_2 = x_2. \end{cases}$$

[illegible]

$$x_1 : x_2 = b + ic : 1 - a = 1 + a : b - ic.$$

[illegible] (σ_r, x) [illegible]

$$|x_1|^2 : |x_2|^2 = (b^2 + c^2) : (1-a)^2 = 1 - a^2 : (1-a)^2$$
$$= 1 + a : 1 - a = \cos^2\frac{\vartheta}{2} : \sin^2\frac{\vartheta}{2}$$

Am Rand: [illegible] a, b, c $(a^2 + b^2 + c^2 = 1)$ [illegible]

$$\sigma_r = a\sigma_x + b\sigma_y + c\sigma_z$$

$$= \begin{Vmatrix} a & b+ic \\ b-ic & -a \end{Vmatrix}$$

[illegible] ± 1. [illegible]

4. Statistik der Gemenge. [illegible]

[illegible]

$$W = \sum_k v_k W_k \qquad \left(\sum_k v_k = 1\right).$$

[illegible]

[illegible]

$\langle x_i \bar{x}_i \rangle = \frac{1}{n}$ $\langle x_i \bar{x}_k \rangle = 0$ $(i \neq k)$.

[illegible shorthand]

$= \frac{a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}}{n}$

[illegible shorthand]

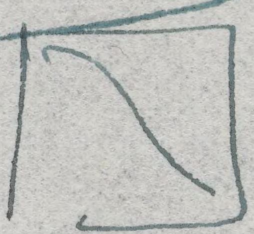
$A_{(\varepsilon)} = \sum a_i x_i \bar{x}_i$, $B_{(\varepsilon)} = \sum b_i y_i \bar{y}_i$ [illegible] $(A \cdot B)$: $\varphi = \sum x_s \varphi_i = \sum x_i^* \varphi_i^*$,

$x_k^* y_k = \sum_i t_{ik} x_i$.

[illegible shorthand] $a \leq \alpha \leq a'$ [illegible] $b \leq \beta \leq b'$ [illegible] $a_1, \dots, a_g$ [illegible] (a, a') [illegible] $b_1, \dots, b_\sigma$ [illegible] $(a_1, \dots, a_g$ [illegible] $x_{g+1} = \dots = x_s = 0$ [illegible] $b_1, \dots, b_\sigma$ [illegible]

$\sum_{k=1}^{\sigma} y_k \bar{y}_k$ [illegible]

$\mathfrak{S}\mathfrak{n}(g)\sqrt{dg}$ [illegible] $\mathfrak{R}_a^{a'}$ [illegible shorthand]



$\mathcal{E}_a^{a'} = \sum_{i=1}^{g} x_i \bar{x}_i = \sum_{i,k=1}^{s} e_{ik} x_i \bar{x}_k$ $e_{ik} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$

$\mathcal{F}_b^{b'} = \sum_{k=1}^{\sigma} y_k^* \bar{y}_k^* = \sum_{i,k=1}^{s} f_{ik} x_i \bar{x}_k$; $f_{ik} = \sum_{\varrho=1}^{\sigma} t_{i\varrho} \bar{t}_{k\varrho}$

[illegible shorthand] $\mathfrak{R}_a^{a'}$ [illegible]

$\langle x_i \bar{x}_k \rangle = \begin{cases} \frac{1}{s} & (i = k) \\ 0 & (i \neq k), \end{cases}$ $(i, k = 1, \dots, \varrho)$.

$W = \frac{1}{s} \sum_{r=1}^{g} f_{rr} = \dots = \frac{1}{s} \sum_{r=1}^{g} \sum_{s=1}^{\sigma} |t_{rs}|^2$

[illegible shorthand] $\frac{1}{s}$ [illegible] $\mathcal{E}_a^{a'}, \mathcal{F}_b^{b'}$ [illegible shorthand]

[illegible] $\mathcal{E}_a^{a'}$, $\mathcal{F}_b^{b'}$ [illegible] W [illegible]

$W = \mathrm{Spur}\left(\mathcal{E}_a^{a'} \cdot \mathcal{F}_b^{b'}\right)$

[illegible] v. Neumann [illegible shorthand] β.

[illegible] $A = \{a_{ik}\}$, $B = \{b_{ik}\}$ [illegible] $\mathrm{Spur}(A B) = \sum_{ik} a_{ik} b_{ki} = \mathrm{Spur}(B A)$ [illegible] α, β.

[illegible shorthand] $\sum_{s} \sum_{r} t_{is} \bar{t}_{rs}$ [illegible] $a_{ir}\, a_{rk}$ [illegible] A, B

$\sum \mathcal{F} \bar{\mathcal{F}} = \sum_{s} t_{is} t_{rs}$

$\sum t_{is} \bar{t}_{ks}\; t_{i's'} \bar{t}_{k's'}$ ... $t_{ks'} t_{i's}$

IV

[illegible]

5. Hermitesche Formen und infinitesimale unitäre ~~Transformationen~~ Abbildungen.

[illegible]

$$x'_k = \sum_i a_{ik} x_i \; ; \quad \mathfrak{x}' = \mathfrak{x} A$$

[illegible]

$$\bar{A}^* = A$$

[illegible]

$$dx_k = \sum_{i=1}^{n} c_{ik} x_i \; ; \quad d\mathfrak{x} = \mathfrak{x} C$$

[illegible] $\sum x_i \bar{x}_i$ [illegible]

$$\sum \bar{x}_k dx_k = 0 \qquad \sum c_{ik} x_i \bar{x}_k = 0$$

[illegible]

$$c_{ki} = -\bar{c}_{ik} \; ; \quad \bar{C}^* = -C$$

[illegible]

[illegible] $C = iA$ [illegible]

[illegible]

$$G(\mathfrak{x}) = \sum g_{ik} x_i \bar{x}_k$$

$$G(\mathfrak{x} + d\mathfrak{x}) = G(\mathfrak{x}) + dG$$

$$dG = \sum_{ik} g_{ik}\, dx_i \bar{x}_k + \sum_{ik} g_{ik} x_i\, d\bar{x}_k = \sum \dot{g}_{ik} x_i \bar{x}_k$$

$\|\dot{g}_{ik}\|$ [illegible] $dG = CG + G\bar{C}^* = CG - GC$.

~~$dG = CG - GC$.~~

[illegible]

$x'_k = e_k x_k$ [illegible] $e_k = e^{i\varphi_k}$ [illegible]

Drehung [illegible]

[illegible]

[illegible]

6. Das Gesetz der zeitlichen Veränderung. Die Zeitgesamtheit.

[illegible] (Hilbert, [illegible]) [illegible]

[illegible]

$1 + \xi\mathcal{E} + \frac{\xi^2}{2!}(1+\xi\mathcal{E})^m$ [illegible]

$$\lim_{m=\infty}\left(1 + \frac{t\mathcal{E}}{m}\right)^m = e^{t\mathcal{E}} = U(t)$$

[illegible]

$$U(t) = 1 + \frac{t\mathcal{E}}{1!} + \frac{t^2\mathcal{E}^2}{2!} + \frac{t^3\mathcal{E}^3}{3!} + \cdots$$

[illegible]

$$U(t+t') = U(t)\,U(t')$$

[illegible] $e^{i\lambda a}$ [illegible] $e^{i\lambda A}$ [illegible] $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}e^{i\lambda a}$ [illegible]

6. Das Gesetz der zeitlichen Veränderung. Die Zeitgesamtheit.

[illegible] $\varphi(t)$ [illegible] $(\varphi(t), \varphi(t+dt) = \varphi(t) + d\varphi)$ [illegible]

II. Teil. ~~Die Gruppe als das Bindeglied zwischen physikalischer Größen~~

Gruppentheorie der kanonischen Variablen-Relationen [?] der Quantenmechanik.

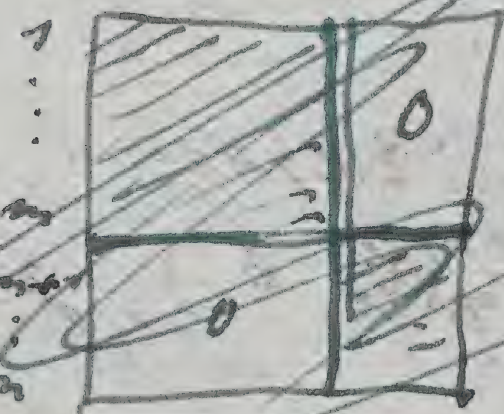
Seite 16
Endliche
Unitäre Abb

1. Über Gruppen und ihre unitären Darstellungen.

$(ab)c = a(bc)$

vielleicht doch U

$U(1) = 1$



$$A = \sum_s U(s)\xi(s)$$

vielleicht
$\alpha(s), \beta(s), \gamma(s)$
A B Γ

$$A = \sum_s U(s)\xi(s), \quad B = \sum U(s)\eta(s)$$

$$C = AB = \sum_{s,t} \xi(s)\xi(t)\ldots = \sum_{s,t} \xi(s,t)\ldots$$

$$\zeta(s) = \sum_t \xi(st^{-1})\eta(t)$$

$$dq = q^{i\frac{\mathfrak{E}}{\hbar}dt} \ldots = q^{\frac{2\pi i \mathfrak{E} dt}{h}}$$

[illegible] $A(q+dq) - A(q)$ [illegible]

$$dA = \frac{2\pi i}{h}\left(A\frac{\mathfrak{E}}{q} - \frac{\mathfrak{E}}{q}A\right)dt$$

[illegible] $\frac{d\mathfrak{E}}{dt} = 0$ [illegible]

$$\mathfrak{E}(q) = \mathfrak{E}_1|x_1|^2 + \mathfrak{E}_2|x_2|^2 + \ldots + \mathfrak{E}_n|x_n|^2,$$

[illegible]

$$dx_\mu = -\frac{2\pi i \mathfrak{E}_\mu}{h}\, x_\mu\, dt$$

[illegible]

$$x_\mu(t) = x_\mu^0 \, e^{-\frac{2\pi i \mathfrak{E}_\mu}{h} t};$$

$$A(q) = \sum_{\mu\nu} a_{\mu\nu}\, x_\mu \bar{x}_\nu \ldots$$

$$A(t, q) = \sum a_{\mu\nu}(t)\, x_\mu \bar{x}_\nu$$

$$a_{\mu\nu}(t) = a_{\mu\nu} \cdot e^{\frac{2\pi i t(\mathfrak{E}_\nu - \mathfrak{E}_\mu)}{h}};$$

[illegible] $\frac{\mathfrak{E}_\nu - \mathfrak{E}_\mu}{h}$ [illegible]

[illegible] $A = A(t; q)$ [illegible]

$$\frac{\partial A(t; q)}{\partial t} = \sum a_{\mu\nu} \frac{da_{\mu\nu}}{dt} \cdot x_\mu x_\nu$$

[illegible] $\dot{A}$ [illegible] $A(t+dt; q+dq) - A(t; q)$,

$$dA = \left\{\dot{A} + \frac{2\pi i}{h}\left(A\mathfrak{E} - \mathfrak{E}A\right)\right\}dt.$$

[illegible] $-\frac{2\pi i}{h}\mathfrak{E}(t)dt$ [illegible] $t = t_1$ [illegible] $t = t_2$ [illegible] $U(t_1, t_2)$, [illegible] $q(t_1)$ [illegible] $q(t_2)$ [illegible]

$$U(t_1, t_2)\, U(t_2, t_3) = U(t_1, t_3).$$

[illegible] $U(t_1, t_2)$ [illegible]

[illegible] $x_\mu = \varrho_\mu e^{i\varphi_\mu}$

[illegible]

$$|x_1| = \varrho_1, \quad |x_2| = \varrho_2, \ldots, |x_n| = \varrho_n$$

[illegible] $W(q)$ [illegible] $(= W(t, x_1, \ldots))$ [illegible]

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi} W(\varrho_1 e^{i\varphi_1}, \varrho_2 e^{i\varphi_2}, \ldots, \varrho_n e^{i\varphi_n})\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \ldots d\varphi_n$$

Left margin notes:

[illegible]

$$(1 + i\tfrac{\mathfrak{E}}{\hbar}dt) \simeq (1 + i\tfrac{\mathfrak{E}}{\hbar}dt)(1 + i \ldots)$$

$$= 1 + i(\mathfrak{E} + c)dt$$

[illegible]

[illegible] $|x_i|^2 = x_i^2$ [illegible]

$$\mathfrak{E} = \mu|\mathcal{H}|\sigma_z$$

[illegible]

$$\frac{4\pi \mu \mathcal{H}}{h} t$$

$$\left\| \begin{matrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{matrix} \right\| \to \left\| \begin{matrix} s_{11} & s_{12} e^{-i\varphi} \\ s_{21} e^{i\varphi} & s_{22} \end{matrix} \right\|$$

$$\sigma_x(t) = \sigma_x, \quad \sigma_y(t) = \sigma_y \cos \ldots - \sigma_z \sin \ldots$$

$$\sigma_z(t) = +\sigma_y \sin \ldots + \sigma_z \cos \ldots$$

(Larmor-[illegible])

[illegible]

DSI

VI.

[illegible shorthand]

$\bar{A}^* = \sum_s \ldots = \sum_s \xi(s^{-1})\, U(s^{-1}) = \sum \xi(s)\, U(s) = A$

[illegible shorthand]

$st = ts$ [illegible shorthand] $a_1, \ldots, a_f$ [illegible shorthand]

$s = \frac{x_1}{a_1}\,\frac{x_2}{a_2}\cdots\frac{x_f}{a_f}, \quad a_1^{z_1}\, a_2^{z_2} \cdots a_f^{z_f}$

[illegible shorthand]

$x' = \varepsilon(s)\cdot x$

[illegible shorthand]

$\varepsilon(s) = \varepsilon_1^{z_1}\,\varepsilon_2^{z_2}\cdots\varepsilon_f^{z_f}$

[illegible shorthand]

$\sigma_1 B_1 + \sigma_2 B_2 + \cdots + \sigma_f B_f$

[illegible shorthand]

$(1 + i\xi A)(1 + i\xi B) = 1 + i\xi(A+B)$

[illegible shorthand]

$U(\sigma) = e(\sigma_1 A_1 + \cdots + \sigma_f A_f)$

[illegible shorthand]

$U(\sigma) = e(\sigma A), \quad V(\tau) = e(\tau B)$

$U(\sigma)\, V(\tau)\, U^{-1}(\sigma)\, V^{-1}(\tau) = U(\sigma)\, V(\tau)\, U(-\sigma)\, V(-\tau)$

[illegible shorthand]

$1 + i\sigma\tau(C + \ldots)$

[illegible shorthand]

$C = i(AB - BA) = [AB]$

[illegible]

$[A_i\, A_k] = 0$ [illegible]

$U(\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_f)\, U(\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_f) = U(\sigma_1 + \tau_1, \sigma_2 + \tau_2, \ldots, \sigma_f + \tau_f)$.

[illegible]

$\int \cdots \int \xi(\sigma_1 \ldots \sigma_f) \times (\sigma_1 \ldots \sigma_f)\, d\sigma_1 \ldots d\sigma_f$

[illegible]

$$\mathfrak{E}(s)\,\mathfrak{E}(t) = \varepsilon \cdot \mathfrak{E}(s+t)$$

[illegible]

$$\mathfrak{E}(s) = \mathfrak{E}^{z_1}(a_1) \cdot \mathfrak{E}^{z_2}(a_2) \cdots \mathfrak{E}^{z_f}(a_f)$$

[illegible] ε_{ik} $(r, s = 1, 2, \ldots, f)$ [illegible]

$$(\varepsilon_{ki} \cdot \varepsilon_{ik} = 1) \qquad \mathfrak{E}(a_i)\,\mathfrak{E}(a_k) = \varepsilon_{ik}\,\mathfrak{E}(a_k)\,\mathfrak{E}(a_i) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, f)$$

[illegible]

$$A_i A_k - A_k A_i = h_{ik} \sqrt{-1} \cdot 1 \qquad (h_{ki} = -h_{ik})$$

[illegible]

$$S = \sum A_i \sigma_i, \qquad T = \sum A_i \tau_i$$

$$[ST] = \sqrt{-1} \sum_{i,k=1} h_{ik}\, \sigma_i \tau_k$$

[illegible] σ_i, τ_i [illegible]

~~[illegible] $[ST]$ [illegible] $\sigma_1 = \ldots = \sigma_f = 0$ [illegible]~~

~~$\sum_{i,k} a_{ik} \sigma_i = 0$~~

[illegible]

Gr VI

VI 6

[illegible]

$$AB = \varepsilon BA.$$

[illegible] $\varepsilon^n = 1$, [illegible] $k = 1, 2, 3, \dots$:

$$A^k B = \varepsilon^k B A^k, \quad AB^l = \varepsilon^l B^l A$$

[illegible] A^k, B, [illegible] A, B [illegible] k, l:

$$A^k B^l = \varepsilon^{kl} B^l A^k.$$

[illegible]

$$(AB)^k = \varepsilon^{\frac{k(k+1)}{2}} B^k A^k$$

[illegible] $k = n$, [illegible]

$$A^n B = B A^n$$

[illegible] $A^n = 1$ [illegible]

[illegible] $\varepsilon_1 = $ [illegible] $h_1 = h$, [illegible] $U(\sigma) = A$ [illegible] $A^h = 1$ [illegible]

$$U(\sigma) = A_1^{\sigma_1} A_2^{\sigma_2} \cdots A_f^{\sigma_f}.$$

[illegible] ε_{ik} [illegible]

$$A_i A_k = \varepsilon_{ik} A_k A_i \quad (i \neq k;\ i, k = 1, \dots, f)$$

[illegible] $1 + i\xi A$ [illegible]

$$A = \sigma_1 A_1 + \dots + \sigma_f A_f,$$

[illegible] A [illegible] e_{ik} [illegible] $[A_i A_k]$

$$A_k A_i - A_i A_k = e_{ik} \sqrt{-1} \cdot \underline{1}$$

[illegible] A [illegible] B

$$B = \tau_1 A_1 + \dots + \tau_f A_f$$

[illegible]

$$[AB] = \sqrt{-1} \sum_{i,k}^{f} e_{ik} \sigma_i \tau_k \cdot \underline{1}$$

[illegible]

$$\sum e_{ik} \sigma_i \tau_k$$

[illegible] $A_i^{h_i} A_k = \varepsilon_{ik}^{h_i} A_k A_i^{h_i}$ [illegible]

$$A_k = \varepsilon_{ik}^{h_i} A_k$$

[illegible] ε_{ik} [illegible] h_{ik} [illegible]

$$U(\sigma) = e^{i(\sigma_1 A_1 + \dots + \sigma_f A_f)};$$

$[\sigma_1 \cdots \sigma_f]$ [illegible]

$$[\sigma_1 \cdots \sigma_f][\tau_1 \cdots \tau_f] = [\sigma_1 + \tau_1, \cdots, \sigma_f + \tau_f]$$

[illegible] σ_i, τ_i [illegible]

[illegible]

[illegible] $k = l = n$ [illegible]

$1 + \frac{iA}{n}$, $1 + \frac{iB}{n}$

[illegible] $(U = U(\sigma_1 \dots \sigma_f)$ [illegible] $V = V(\tau_1, \dots \tau_f)$ [illegible]

$$UVU^{-1}V^{-1} = e(h_{ik}\sigma_i\tau_k)\cdot \mathbf{1}$$

[illegible] $UVU^{-1}V^{-1} = \mathbf{1}$ [illegible]

[illegible] $V = V(\tau_1 \dots \tau_f)$ [illegible] $U = \mathbf{1}$ [illegible] $\sigma_1 = \sigma_2 \dots = \sigma_f = 0$.

[illegible]

[illegible] $\neq 0$ [illegible]

[illegible]

[illegible] $\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$ [illegible] $A_1, B_1, \dots, A_f, B_f$. [illegible] $\sigma_1\tau_1, \dots, \sigma_f\tau_f$.

[illegible]

$$[A_i A_k] = 0, \quad [B_i B_k] = 0$$

$$[A_i B_i] = \mathbf{1}, \quad [A_i B_k] = 0 \ (i \neq k).$$

[illegible]

$$U(\sigma) = e^{iA}, \ A = \sigma_1 A_1 + \dots + \sigma_f A_f; \quad V(\tau) = e^{iB}, \ B = \tau_1 B_1 + \dots + \tau_f B_f$$

[illegible]

$$U(\sigma)V(\tau)U^{-1}(\sigma)V^{-1}(\tau) = e(\sigma_1\tau_1 + \dots + \sigma_f\tau_f)\cdot \mathbf{1}$$

[illegible] $k = n \ (n \to \infty)$ [illegible]

$$e^{\mathfrak{S}}(\sigma_1 A_1 + \dots + \sigma_f A_f + \tau_1 B_1 + \dots + \tau_f B_f) = e\left(\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{f}\sigma_i\tau_i\right)\cdot V(\tau)\,U(\sigma)$$

$$= e\left(-\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{f}\sigma_i\tau_i\right)U(\sigma)\,V(\tau).$$

---

2. Kanonische Variable und Abelsche Gruppe. Das Elektron.

[illegible]

[illegible] $\frac{h}{2\pi}$ [illegible]

[illegible] $pq = 1$ [illegible] p, q [illegible]

[illegible] P, Q [illegible]

$$QP - PQ = i\mathbf{1}$$

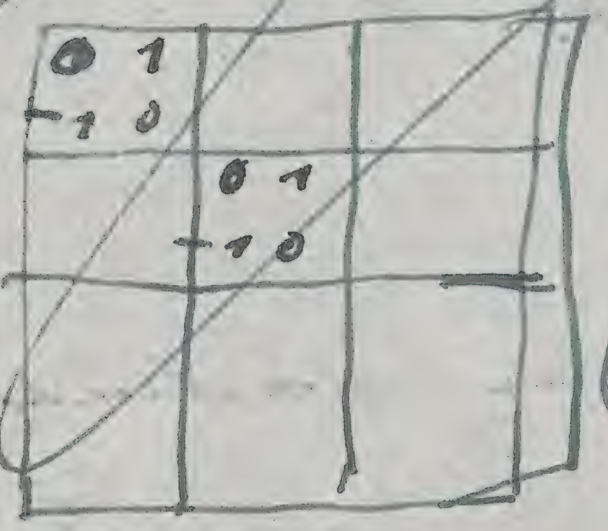
DSI

~~[illegible]~~

VII.

[illegible] $|a_{ik}| \neq 0$. [illegible]

[illegible] σ_i, τ_i [illegible]



$$[A_i A_i'] = \sqrt{-1}, \quad [A_i' A_i] = -\sqrt{-1}; \quad [A_i A_k'] = 0 \quad (i \neq k);$$

$$[A_i A_k] = [A_i' A_k'] = 0 \quad (i, k).$$

[illegible] $a_{ik} = 0$ [illegible]

$\sigma = n q_{ik}$.

[illegible]

$$AB - BA = c\,1, \quad (c \neq 0)$$

[illegible] $a_{11}, a_{22} \ldots$ [illegible] a_i [illegible]

$B = \|b_{ik}\|$,

$$AB - BA = \|(a_i - a_k)\, b_{ik}\|;$$

[illegible] $[AB]$ [illegible]

[illegible] x, y, z [illegible]

$$x^2 = 1, \quad y^2 = 1, \quad z^2 = 1;$$

$$xy = yx = z, \quad yz = zy = x, \quad zx = xz = y.$$

[illegible] $x \cdot y$ [illegible]

$$\mathfrak{E}(x) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad \mathfrak{E}(y) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathfrak{E}(z) = \begin{Vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{Vmatrix}.$$

[illegible]

$$AB = \varepsilon BA,$$

$$AB = BA$$

[illegible]

$$A^k B^l = \varepsilon^{kl} B^l A^k.$$

$$AB^2 = \varepsilon^2 B^2 A, \qquad A^k B = \varepsilon^k B A^k$$

[illegible]

$$(AB)^k = \varepsilon^{\frac{k(k+1)}{2}} B^k A^k = \varepsilon^{-\frac{k(k-1)}{2}} A^k B^k$$

[illegible] $1 + uA$, $1 + vB$ [illegible] $e^{\sigma A}$,

$\mathfrak{E}(\sigma) = e^{\sigma B}$

$AB = \varepsilon BA$
$A^2 B = \varepsilon \cdot \varepsilon^2 B A^2$

[illegible]

$$\mathfrak{E}(\sigma)\,F(\tau)\,\mathfrak{E}^{-1}(\sigma)\,F^{-1}(\tau) = e^{c\sigma\tau}\cdot 1$$

[illegible]

$$\mathfrak{E}(\sigma,\tau) = e^{\sigma A + \tau B}$$

$$\mathfrak{E}(\sigma,\tau) = e^{\frac{1}{2}c\sigma\tau}\,F(\tau)\,\mathfrak{E}(\sigma) = e^{-\frac{1}{2}c\sigma\tau} = \mathfrak{E}(\sigma)\,F(\tau).$$

[illegible] $(\mathfrak{E}(\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_f)$.

[illegible] $\mathfrak{E}(\tau_1, \tau_2 \dots \tau_f)$ [illegible] 1:

$$e\left(\sum h_{ik}\,\sigma_i\,\tau_k\right).$$

[illegible] $e(x)$ [illegible] (e^{ix})].

2. Die den kanonischen Variablen entsprechende Gruppe.

[illegible] p, q [illegible] P, Q [illegible]

$$PQ - QP = \frac{h}{2\pi i}\,1$$

[illegible] iP, iQ [illegible]

[illegible] $\frac{h}{2\pi}$ [illegible]

$$U(\sigma,\tau) = e(P\sigma + Q\tau)$$

$(\sigma, \tau$ [illegible]). [illegible] $f(p,q)$ [illegible] p, q [illegible]

[illegible] p^2, q^2 [illegible]

[illegible] $p^2 q$ [illegible]

P^2Q [illegible] QP^2 [illegible] PQP [illegible]

[illegible]

$$\iint e(P\sigma + Q\tau)\,\varphi(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau,$$

[illegible] $\varphi(\sigma,\tau)$ [illegible] σ, τ.

[illegible] p, q [illegible] $f(p,q)$ [illegible]

$\varphi(\sigma,\tau)$ [illegible]

$$f(p,q) = \iint_{-\infty}^{+\infty} e(p\sigma + q\tau)\,\varphi(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau.$$

[illegible] $f(p,q)$ [illegible]

[illegible] φ [illegible]

$$\varphi(\sigma,\tau) = \bar{\varphi}(\sigma,\tau)$$

[illegible]

[illegible] $f(p,q)$ [illegible]

[illegible]

$e(p\sigma + q\tau)$ [illegible] σ, τ [illegible] p, q [illegible]

[illegible] mod. 2π [illegible]

$2\pi p$ [illegible] τ [illegible]

[illegible] $f(p,q)$ [illegible]

[illegible] $\xi(\sigma,\tau)$ [illegible]

$\xi(\sigma,\tau) = \bar{\xi}(-\sigma,-\tau)$ [illegible]

$$F = \iint e(P\sigma + Q\tau)\,\xi(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau$$

$$f(p,q) = \iint_{-\infty}^{+\infty} e(p\sigma + q\tau)\,\xi(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau$$

[illegible] $f(p,q)$ [illegible] p, q [illegible] $\xi(\sigma,\tau)$ [illegible]

[illegible]

VIII

$e(k f(p,q))$

[illegible]

$$Q_i Q_k - Q_k Q_i = h_{ik}\sqrt{-1}\cdot 1$$

[illegible] $\frac{h_{ik}}{\sqrt{-1}} Q_k$ [illegible]

$$e^{Q(\tau_1 Q_1 + \tau_2 Q_2 + \dots + \tau_f Q_f)} = U(\tau_1, \dots \tau_f).$$

[illegible] $U(\sigma)\cdot U(\tau)$ [illegible]

$\sum_{ik} h_{ik}\sigma_i\tau_k$

$$e(\sum h_{ik}\sigma_i\tau_k).$$

[illegible]

$\sum_{ik} h_{ik}\sigma_i\tau_k$

[illegible]

$$\left\{\begin{array}{ll} P_i Q_i - Q_i P_i = \frac{1}{\sqrt{-1}} 1, & P_i Q_k - Q_k P_i = 0 \quad (i \neq k); \\ P_i P_k - P_k P_i = 0, & Q_i Q_k - Q_k Q_i = 0 \end{array}\right.$$

[illegible] $U(\sigma)$ [illegible] $U(\tau)$ [illegible]

[illegible] $(\sigma_1, \dots, \sigma_f)$ [illegible]

[illegible]

$$F_p = i\iint e(\sigma P + \tau Q)\cdot\sigma\,\varphi(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau, \quad F_q = i\iint e(\sigma P + \tau Q)\,\tau\,\varphi(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau$$

$$QP - PQ = i\,1$$

$$P\cdot e(\sigma P + \tau Q) - e(\sigma P + \tau Q)\cdot P = +\tau\cdot 1 \cdot \frac{h}{2\pi} i$$

$$Q\cdot e(\sigma P + \tau Q) - e(\sigma P + \tau Q)\cdot Q = -\sigma\cdot 1$$

$$-F_p = i(QF - FQ), \quad +F_q = i(PF - FP)$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{2\pi i}{h} F_q, \quad \frac{dQ}{dt} = -\frac{2\pi}{h} F_p$$

3. Übergang zu Schrödingers „Wellentheorie."

$$AB = \varepsilon^{\alpha\tau} BA.$$

$$B = \| b_{ik} \|$$

$$\frac{a_i}{a_k}\, b_{ik} = \varepsilon^{\alpha\tau} b_{ik}$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{2\pi i}{h}(\xi P - P\xi) = +\frac{2\pi}{h} F_q$$

$$\frac{dQ}{dt} = \pm\frac{2\pi}{h} F_p$$

$$\mathcal{H}_q = p$$

$$\mathcal{H} - \sum p\dot q = \mathcal{L}$$

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{H}_q\,\delta q + \mathcal{H}_p\,\delta p - p\,\delta\dot q - \dot q\,\delta p$$

$$e^{i(\sigma\tau' - \tau\sigma')}$$

VIIIa

zu VIII

[illegible shorthand]

α, β, γ [illegible]

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = 1$$

$$\beta\gamma = \gamma\beta = \alpha, \quad \gamma\alpha = \alpha\gamma = \beta, \quad \alpha\beta = \beta\alpha = \gamma.$$

[illegible shorthand]

$$1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{Vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{Vmatrix}$$

[illegible shorthand] $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ [illegible shorthand]

$$p1 + x\alpha + y\beta + z\gamma \quad (p, x, y, z \text{ [illegible]})$$

[illegible shorthand]

$$p1 + x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z$$

[illegible shorthand]

[illegible shorthand] A

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix},$$

[illegible shorthand] A

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

[illegible shorthand] B [illegible shorthand]

$$AB = \varepsilon BA$$

[illegible shorthand] $\varepsilon = -1$ [illegible shorthand] B [illegible shorthand]

$$B = \begin{Vmatrix} 0 & b \\ b' & 0 \end{Vmatrix}$$

[illegible shorthand] $B^2 = 1$ [illegible shorthand]

$$bb' = 1.$$

[illegible shorthand]

$$B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

$x_1' = b' x_2$

$x_2' = b x_1$

$x_1' = b x_2$

$x_2' = b' x_1$

[illegible shorthand] x_1, x_2 [illegible shorthand]

[illegible] $\simeq 1_6 \simeq A$. [illegible] UB [illegible] B [illegible] $\simeq 1_6 \simeq A$. [illegible] $1, A, B, AB$ [illegible]

Es geht direkt weiter

§. Übergang zu Schrödingers Wellentheorie

[illegible] A, B [illegible]

~~$BA = \varepsilon AB$~~

~~$AB = \varepsilon BA$~~, $AB = \varepsilon BA$

[illegible] ε [illegible] ε^n [illegible] A, B [illegible] $A^2 = B^2 = 1$. [illegible] b_i [illegible] $A = \|a_{ik}\|$:

$$\frac{b_k}{b_i} a_{ik} = \varepsilon a_{ik}.$$

[illegible] x_i [illegible] $\frac{b_i}{b_k}$ [illegible] $\frac{b_i}{b_k}$, $\frac{b_k}{b_i}$ [illegible] ε [illegible] $a_{ik} = 0$, [illegible] i, k [illegible] A [illegible]

[illegible] $b_i = b_k$ [illegible] $b_i = \varepsilon b$ [illegible] $b_i = b$ [illegible] $b_i = \varepsilon^2 b$ [illegible] $b_i = \varepsilon^{n-1} b$; [illegible] $b_i = \varepsilon^n b$ [illegible] $a_{ik} = 0$ [illegible]

$x'_k = \sum e_{ik} x_i$

$[ABS] =$

$x''_i = \sum e'_{ki} x'_k$

$f'(q) = q f(q)$

$\frac{QP - PQ}{\frac{h}{2\pi i}} 1$

$\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial f}{\partial q}$ $\quad \frac{h}{2\pi i} f(q)$ $\quad \frac{h}{2\pi i} q 1$

$\frac{h}{2\pi i}$ $\quad B_i A_i - A_i B_i =$

$f(QP - PQ)$

$QP - PQ = \frac{h}{2\pi} i 1$

(IX)

IV

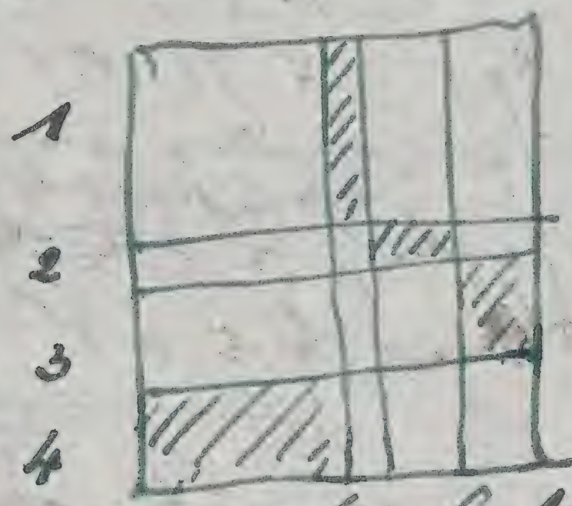
$\varepsilon^{n} = 1$ ... $d \leq n$

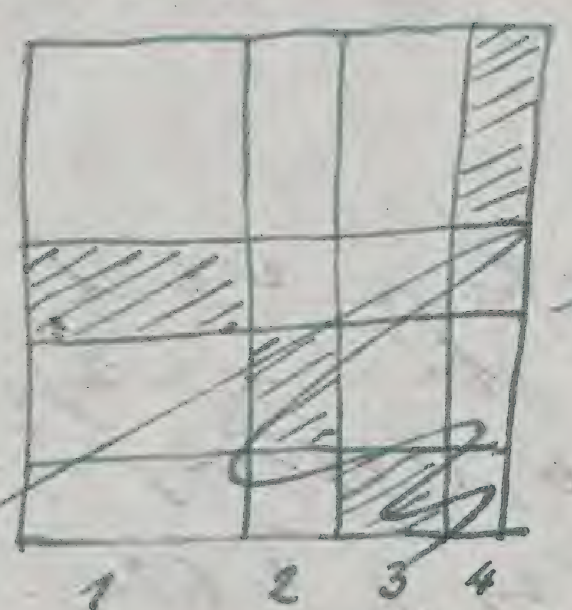
$a_1 = 1$

$\frac{a_i}{a_k} = \varepsilon_{ik} = \varepsilon^{-1}$

$b_{ik} = 0$

$\mathfrak{B}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{B}^{(m)}$





$W = 1$

$x'_{k2} = \sum_i a_{i,k}\, x_{i,1}$

$d = 1,\ n = m$

$x'_k = \sum a_{ik} x_i$

$$\mathfrak{B} = \begin{Vmatrix} \varepsilon & & \\ & \varepsilon^{n-1} & \\ & & \ddots \\ & & & \varepsilon^{(n-1)} \end{Vmatrix} \qquad \mathfrak{A} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ \mathfrak{A} & & & 0 \end{Vmatrix}$$

$A^n = 1$

$a = 1$

$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i a}{n}}$

$x'_q = \varepsilon^q x_q$

$x'_q = x_{q+1}$ ($k = 1, \ldots, n-1$)

$x'_n = \beta x_1$

$B:\ x'_k = \varepsilon^k x_k$

$A:\ x'_k = x_{k-1}$

vert

$x'_k = a_{ik} x_k$

[illegible]

$A^k: \; x'_q = \varepsilon^{kq} x_q$ [illegible]

$A^s: \; x'_k = x_{k-s}$, $B^t: \; x'_k = \varepsilon^{kt} x_k$

[illegible] ③ ② ①

$PQ - QP = i1$ $QP - PQ = i1$.

[illegible] $e(\xi P)$, [illegible] $e(\eta Q)$, — $e(\sigma P) = A^s$; $e(\tau Q) = B^t$;

[illegible] $\varepsilon^{kt} = e(\xi k \tau)$.

$e(\tau Q)$ [illegible] $e^{i\tau q}$ [illegible] $0, \xi, 2\xi, 3\xi, \ldots$ [illegible]

[illegible] $0, 1, 2, \ldots$ [illegible] $0, \xi, 2\xi, 3\xi, \ldots$ [illegible] $e^{i\tau Q}$ [illegible] $e^{i\tau q}$ [illegible]

$$x'(q) = e^{i\tau q}\, x(q),$$

[illegible] $e^{i\sigma p}$ [illegible]

$$x'(q) = x(q+\sigma)$$

[illegible] $\sqrt{\xi}\cdot x(q)$ [illegible] $e^{i\tau q}$ [illegible] $\int |x(q)|^2 dq = 1$

[illegible] $e^{i\tau(q+\sigma)}\, x(q+\sigma)$, [illegible] $e^{i\tau q}\, x(q+\sigma)$; [illegible] $e^{i\sigma\tau}$.

$$dx(q) = q \cdot x(q),$$

$$dx(q) = \frac{dx(q)}{dq} \quad (\text{[illegible]}).$$

[illegible]

[illegible] $0 \ldots +\infty$ [illegible] $e^{i\tau q}\, x(q+\sigma)$ [illegible]

$e^{i(\sigma p + \tau q)}$

$$x'(q) = e\!\left(\tfrac{1}{2}\sigma\tau\right) e^{i\tau q}\, x(q+\sigma).$$

[illegible]

[illegible] 2π [illegible] $e^{i\tau q}$ [illegible] $\tau \to 0$ [illegible]

S. XI

DSI

Zu IX

$c(\tau Q)$ [illegible] $e^{i\tau q}$ [illegible] $e^{i\tau\xi_k}$ [illegible] $k = r, r+1, \ldots$ [illegible]

[illegible] $\sqrt{\xi}$ [illegible] $\varphi(q)$ [illegible] x_k [illegible] $\varphi(q)$ [illegible]

$$\int |\varphi(q)|^2 \, dq = 1$$

Statt φ

[illegible] $f'(q) = f\,V_\tau = e^{i\tau q} f(q)$ [illegible] $e^{i\tau q}$ [illegible] U_σ:

$$\varphi'(q) = \varphi' = \varphi\, U_\sigma = \varphi(q - \sigma)$$

[illegible] $e^{i\sigma p}$ [illegible] σ [illegible]

$$U_{\sigma+\sigma'} = U_\sigma U_{\sigma'} \; ; \quad V_\tau V_{\tau'} = V_{\tau+\tau'}$$

$$\varphi\, U_\sigma V_\tau = e^{i\tau q}\cdot\varphi(q-\sigma),$$

$$\varphi\, V_\tau U_\sigma = e^{i\tau(q-\sigma)}\cdot\varphi(q-\sigma),$$

[illegible]

$$\varphi\, U_\sigma V_\tau = e^{i\sigma\tau}\cdot\varphi\, V_\tau U_\sigma$$

[illegible]

$$p:\ \delta\varphi = \frac{1}{i}\frac{d\varphi(q)}{dq}, \qquad q:\ \delta\varphi = q\,\varphi(q).$$

[illegible] x_k [illegible] q [illegible]

[illegible] $e^{i(\sigma p + \tau q)}$ [illegible]

$$\varphi(q) \to \varphi'(q) = e^{-\frac{1}{2} i\sigma\tau}\cdot e^{i\tau q}\cdot\varphi(q-\sigma)$$

Zu XI

[illegible]

$$\left(\sqrt{1+u^2+v^2+w^2} - \lambda\right) f = a\cdot Pf$$

[illegible] $\lambda = \lambda_n$ [illegible] $f = f_n(u,v,w)$ [illegible] $= 1$ [illegible]

$|f_n|^2\, du\, dv\, dw$

[illegible] $u_n + du$, $v_n + dv$, $w_n + dw$ [illegible]

[illegible] $\overset{P}{\cancel{R}}$ [illegible] $M_\sigma(f)$ [illegible],
– f [illegible] (u, v, w) [illegible]:

$$f^* = \underline{P}\,\cancel{R}\,f = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty M_\sigma(f)\,d\sigma.$$

[illegible] 2λ

$$f^* = \frac{1}{2\pi^2}\cdot\lim_{\lambda=0}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\alpha,\beta,\gamma)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma}{\lambda^2+(u-\alpha)^2+(v-\beta)^2+(w-\gamma)^2}$$

Abgeänderte Einleitung

XI $\frac{dt}{d\tau}$

[illegible]

4. Die relativistische Energie in der Quantenmechanik

[illegible]

$$c\sqrt{c^2m^2+u^2+v^2+w^2}\,.$$

[illegible]

$$x = \frac{h}{2\pi mc}\,x^*,\quad u = mc\,u^*,$$

[illegible]

$$\frac{1}{4\pi}\,\Re\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha u}\sqrt{1+u^2}\; e^{-i\sigma u}\,du = G_\alpha(\sigma)$$

[illegible]

$$\varphi(x)\rightarrow \varphi'_\alpha(x) = \lim_{\alpha\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x-\sigma)\,G_\alpha(\sigma)\,d\sigma = \int G_\alpha(x-\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi$$

[illegible]

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} G_\alpha(x-\xi)\,\varphi(\xi)\,\bar{\varphi}(x)\,dx\,d\xi .$$

[illegible] $\alpha = 0$ [illegible] $\sigma > 0$.

[illegible]

$$\int_0^\infty e^{-(\alpha+i\sigma)u}\sqrt{1+u^2}\,du$$

$u = -it$ [illegible]

$$-i\int_0^1 e^{-(\sigma-i\alpha)t}\sqrt{1-t^2}\,dt - \int_1^\infty e^{-(\sigma-i\alpha)t}\sqrt{t^2-1}\,dt$$

[illegible]

$$\frac{1}{4}\,G(\sigma) = \frac{1}{\pi}\int_1^\infty e^{-\sigma t}\sqrt{t^2-1}\,dt \qquad (\sigma>0)$$

[illegible] $\alpha = 0$ [illegible]

$$-\mathcal{G}(\sigma) = \frac{1}{\pi\sigma^2} - \Gamma(\sigma)$$

$$-\mathcal{G}_\alpha(\sigma) = \frac{1}{\pi\sigma^2} \quad \mathcal{R}\,\frac{1}{\pi(\sigma - i\alpha)^2}$$

$\alpha + i\sigma = 0$ ... $\alpha = 0$

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = \frac{1}{\pi}\,\mathcal{R}\int \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^2}$$

$$= D\varphi^*(x) + \int \Gamma(x-\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi,$$

$$-D\varphi^*(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{z\to x}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{(z-\xi)^2}.$$

$z = x + iy$ ... $y > 0$ ... $y = 0$ ... $\varphi(x)$ ... $\frac{d\varphi}{dx}$ ... $D(\varphi)$ ... $-\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dx}$ ... $\sqrt{1+x^2}$ ...

$$D(\varphi) + \iint_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x-\xi)\,\varphi(x)\,\varphi(\xi)\,dx\,d\xi$$

$V(x)$ ...

$$D(\varphi) + \iint_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x-\xi)\,\varphi(x)\,\varphi(\xi)\,dx\,d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} V(x)\,\varphi^2(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi^2\,dx = 1.$$

$\varphi(x) + \frac{d^2\varphi}{dx^2}$ ...

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \varphi(x) = (\lambda - V(x))^2\,\varphi(x).$$

Schrödinger ... P. Epstein ...

$\frac{1}{2\pi i}\int$ ... $i\,\frac{dF}{dx}$ ... $\frac{d\Phi}{i\,dy}$ ... $\mathcal{H} = \mathcal{E} + V$ ... $\lambda - V(x)$

$\varphi(q)$ ... $f(p)$ ...

$$\varphi(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqp} f(p)\,dp$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i q(p+\tau)} f(p)\,dp = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqp}\,f(p-\tau)\,dp,$$

U_σ ...

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqp}\,e^{-i\sigma p} f(p)\,dp.$$

$$f(p)\,V_\tau = f(p-\tau), \qquad f(p)\,U_\sigma = e^{-i\sigma p} f(p).$$

Zum Schrödinger-Paragraphen

ψ statt φ
φ statt f

*) ... Titchmarsh ...

ε ... mc^2 ...

$$V = -\frac{\alpha}{r}, \quad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \alpha = \frac{2\pi e e'}{h c^2})$$

051

XII

$(r^2 = x^2 + y^2 + z^2)$ [illegible] $\frac{1}{r}$ [illegible] $\frac{e^{-\lambda r}}{r}$ [illegible]

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda r}}{r}\, e^{-i(\alpha x+\beta y+\gamma z)}\, dx\,dy\,dz$$

[illegible]

$$\frac{4\pi}{\lambda^2+\sigma^2}, \quad \sigma^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2.$$

[illegible] $\varphi(u,v,w)$ [illegible]

$$P\varphi(u,v,w) = \frac{1}{2\pi^2}\iiint_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u+\alpha, v+\beta, w+\gamma)\cdot \frac{d\alpha\, d\beta\, d\gamma}{\sigma^2}$$

$$(\;) \quad = \frac{1}{2\pi^2}\iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\alpha,\beta,\gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma}{(u-\alpha)^2+(v-\beta)^2+(w-\gamma)^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty M_\sigma(f)\, d\sigma.$$

[illegible] $M_\sigma(f)$ [illegible] u, v, w [illegible]

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha\, d\beta\, d\gamma}{r_{1 0}^2\, r_{2 0}^2} = \frac{\text{const.}}{r_{12}},$$

[illegible] r_{10}, r_{20}, r_{12} [illegible]

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial w^2} = \ldots \varphi.$$

[illegible]

$$R^2 = (u-\alpha)^2 + (v-\beta)^2 + (w-\gamma)^2 = s^2 + \sigma^2 - 2s\sigma\cos\vartheta$$

[illegible] $P_k(\cos\vartheta)$ [illegible]

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{2s\sigma}\sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) L_k\, P_k(\cos\vartheta).$$

$$t = \frac{s^2+\sigma^2}{2s\sigma} > 1.$$

$$L_k(t) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{P_k(x)\, dx}{t-x}$$

$$L_0(t) = \frac{1}{2}\lg\left|\frac{t+1}{t-1}\right| = \lg\left|\frac{s+\sigma}{s-\sigma}\right|$$

[illegible] su, sv, sw [illegible] u, v, w [illegible] $\sigma\alpha, \sigma\beta, \sigma\gamma$ [illegible] $\Omega: \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1$, $Y_k(u,v,w)$ [illegible] k [illegible]

$$f = Y_k(u\,v\,w)\cdot s f(s)$$

[illegible]

$$\int_\Omega Y_k(\alpha,\beta,\gamma)\, P_k(\cos\vartheta)\, d\omega = \begin{cases} \frac{4\pi}{2k+1}\, Y_k(u,v,w) & (k=l) \\ 0 & (k\neq l)\end{cases}$$

[illegible] $f(s)$ [illegible]

$$f'(s) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \ldots f(\sigma)\, d\sigma = P_k f(s).$$

[illegible]

$$\ldots f(s) - \alpha\cdot P_k f(s) = \lambda f(s)$$

Margin notes:

$$\int_0^\infty \frac{2s\sigma\, f(\sigma)\, d\sigma}{s^2+\sigma^2 - \ldots}$$

$$\frac{2}{\pi}\int f\, d\sigma$$

$$\sigma\int_0^\infty \frac{d\sigma}{r_{u\alpha}^2}$$

$$1+\sigma^2-2\sigma$$

$$\frac{1}{4\pi^4}\cdot\pi^3$$

$$2\pi\int\int_0^\infty \frac{d\sigma\cdot\sin\vartheta\, d\vartheta}{1+\sigma^2-2\sigma\cos\vartheta}$$

$$\int_0^\infty \frac{d\sigma}{2\sigma}\cdot\ldots\lg\left|\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\right|$$

$$\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty \lg\left|\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\right|\cdot\frac{d\sigma}{\sigma}$$

$$2\int_0^1 \lg\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{\sigma}$$

$$\int \frac{(1-x^2)^k}{(t-x)^k}\, dx$$

$$\frac{\sigma}{1} - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma^3}{3}$$

$$2\left\{\frac{1}{1} + \frac{\sigma^2}{3} + \frac{\sigma^4}{5}\cdots\right\}$$

$$4\left\{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right\} = \frac{\pi^2}{2}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)$$

$$\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{3}{4}$$

[illegible] $\lambda = \lambda_n^{(k)}$ [illegible] $f_n^{(k)}(s)$ [illegible]

$\int f^2 ds$ [illegible]

$|f_n^{(k)}|^2 ds$

[illegible] $\lambda_n^{(k)}$ [illegible]

[illegible] (u,v,w) [illegible] $|Y_l|^2 d\omega$ [illegible]

[illegible] Y_k [illegible] $2k+1$ [illegible]

[illegible] $l = -k, \ldots -1, 0, 1, \ldots, k$; $\int Y_k \bar{Y}_l \, d\omega = 0$

$\sum c_k Y_k$

c_k

$\left\{ \begin{matrix} Y_k f_n^{(k)}(s) \\ \vdots \\ Y_k \end{matrix} \right.$

$\sum |Y_k|^2 d\omega$

[illegible] $s f_n^{(k)}(s) Y_k^{(l)}(u,v,w)$.

$l - 1$ (n, k, l) [illegible] $\lambda_n^{(k)}$ [illegible] $|f_n^{(k)}|^2 ds$ [illegible]

[illegible] (u,v,w) [illegible] $|Y_k^{(l)}|^2 d\omega$ [illegible]

[illegible] $f(u,v,w)$ [illegible]

$$\alpha^2 \quad F = (\lambda - \sqrt{1+s^2})^2 f$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial w^2} = \alpha^2 f$$

[illegible] $f + \ldots$ [illegible]

[illegible] $f_n^{(k)}(s)$.

aufbewahren, 6 nach 2!

[illegible]

[illegible] $f(s)$ [illegible]

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \lg \left| \frac{s+\sigma}{s-\sigma} \right| f(\sigma) \, d\sigma \qquad \frac{\Phi}{s}$$

[illegible] $(s+it)$ [illegible] $t > 0$ [illegible] $-f(s)$ [illegible]

[illegible] $s\sqrt{-2} \ldots$

~~$D(\Phi) = $ Extremum~~, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi^2 \, ds}{\sqrt{1+s^2} - \lambda} = 1$ [illegible] (Eb[illegible]), [illegible]

$D(\Phi) = $ Extremum, ~~$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\Phi^2 \, ds}{1+s^2} = 1$ Nebenbedingung.~~ ~~Φ^2~~

$$\int \Phi^2 \cdot \frac{2\,ds}{1+s^2} = 1$$

$(\Phi$ [illegible]$)$

[illegible] $\lambda \frac{ds}{\ldots}$ [illegible]

$$\lambda^2 = -\frac{2\pi^2 e^2 \varepsilon^2 m}{h^2 \mathfrak{E}}$$

$$\frac{2\,ds}{1+s^2} = \frac{1}{i} \lg \frac{s-i}{s+i}$$

[illegible]

$$\zeta = \frac{s-i}{s+i}$$

[illegible] ρ, ϑ [illegible] $D(\Phi)$ [illegible] $\rho = 1$ [illegible] $\int \Phi^2 \, d\vartheta = 1$.

[illegible]

$\sqrt{\pi} \cdot \Phi = \rho^n \sin n\vartheta, \quad \lambda = n.$

[illegible]

$f_n(s) = (1 + \cos\vartheta) \sin n\vartheta$

Streichen!

XII *

[illegible]

$$\varphi \to \varphi' : \varphi'(u\,v\,w) = \sqrt{1+s^2}\cdot\varphi(u\,v\,w)$$

$$(s^2 = u^2 + v^2 + w^2).$$

[illegible] $\frac{1}{r}$ $(r^2 = x^2+y^2+z^2)$ [illegible] $\frac{1}{r}$ [illegible] $\frac{e^{-\lambda r}}{r}$ [illegible]

[illegible] F [illegible]

$$F = Y_k \cdot F(s, \tau),$$

[illegible] Y_k [illegible]

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(s^2 \frac{\partial F}{\partial s}\right) + s^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} = k(k+1)F$$

[illegible] $F(s,\tau)$ [illegible] $sF(s,\tau) = F^*(s,\tau)$ [illegible]

$$\frac{\partial^2 F^*}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 F^*}{\partial \tau^2} = \frac{k(k+1)F^*}{s^2}$$

F^* [illegible] $\tau = 0$ [illegible] (s,τ) [illegible] $\frac{1}{R^2}$,

$$R^2 = (u-\alpha)^2 + (v-\beta)^2 + (w-\gamma)^2 = s^2 + \sigma^2 - 2s\sigma\cos\vartheta$$

[illegible] $P_k(\cos\vartheta)$ [illegible]

$$\varphi = Y_k \cdot s\,\varphi^*(s)$$

[illegible]

$$\varphi^*(s) \to \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty L_k\left(\frac{s^2+\sigma^2}{2s\sigma}\right)\cdot\varphi^*(\sigma)\,d\sigma,$$

$$L_k(t) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_k(x)\,dx}{t-x}$$

[illegible]

Margin notes:

$$2\iiint \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$$

$$8\pi\int_0^1 \frac{r^2\,dr}{\sqrt{1-r^2}}$$

$$4\pi\int_0 \cos^2\varphi\, d\varphi$$

$$2\pi^2 \int_0 \frac{1-\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi$$

$$\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{2s\sigma}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)L_k\cdot P_k(\cos\vartheta)$$

XIII

[illegible]

$$ns = \frac{2\pi e e' m}{h} \lg \frac{\vartheta}{2}.$$

[illegible]

$$\int_0^\infty f^2 d\sigma = \frac{\pi^2 e e' m}{h n}$$

[illegible]

$$f \to f' = \frac{1}{2\pi^2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u_1+\alpha, v_1+\beta, w_1+\gamma;\ u_2+\alpha, v_2+\beta, w_2+\beta)}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} (d\alpha\, d\beta\, d\gamma)$$

[illegible]

Math. Ann.

[illegible] $k = 0$ [illegible] P_0 φ [illegible] $f(s)$ [illegible]

$$P_0 f(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lg\left|\frac{1}{s-\sigma}\right| f(\sigma)\, d\sigma$$

[illegible] $s > 0$ [illegible] $\Phi(s)$ [illegible] $P_0 f(s)$ [illegible] $\Phi(s)$ [illegible] $-f(s)$ [illegible]

[illegible] 2 [illegible]

XIV.

[illegible]

$A = \sum \varepsilon_{(i)} x_{(i)}$, [illegible]

[illegible] a fortiori [illegible] $\varepsilon_{(i)}$ [illegible]

[illegible]

Mathematischer Anhang

Beweis des Satzes von der Hauptachsentransformation einer unitären Abbildung.

[illegible] $A = \|a_{ik}\|$ [illegible]

$\neq 0$, [illegible] $\varepsilon A = \varepsilon A$ [illegible] $\sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_i = \varepsilon x_k$

[illegible]

$\det.(\varepsilon 1 - A) = 0$, [illegible]

[illegible] x_1, [illegible] $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ [illegible]

$a_{11} = \varepsilon, \quad a_{12} = \dots = a_{1n} = 0$ [illegible] $|\varepsilon| = 1$. [illegible]

$1 + |a_{21}|^2 + \dots + |a_{n1}|^2 = 1, \quad a_{21} = \dots = a_{n1} = 0.$

[illegible]

$A = \|a_{ik}\|, \; B = \|b_{ik}\|$ [illegible]

[illegible] a_i [illegible]

$(a_i - a_k) b_{ik} = 0$. [illegible] $a_1 = a_2 = \dots = a'$, $a_? = \dots = a''$, [illegible] $b_{ik} = 0$ [illegible]

[illegible]

Margin notes:

1 [illegible] $\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_x = 2i\sigma_z, \dots$ [illegible]

[illegible] a_i [illegible] $a_i = \varepsilon$ [illegible]

ε	0	0	…	0
0	a_{22}	…	…	a_{2n}
0	…			…
⋮	⋮			⋮
0	a_{n2}	…	…	a_{nn}

[illegible] a', a'' [illegible] $R(a'), R(a'')$ [illegible] ξ [illegible] I, [illegible] 1, [illegible] A [illegible]

1. [illegible] $a', a'', \dots$ [illegible] $R(a'), R(a'')$, [illegible]

[illegible] $R(a'), R(a''), \ldots$ [illegible] $B', B'', \ldots$ [illegible]

[illegible]

$$a_{12} = \cdots = a_{1n} = 0 \quad a_{21} = \cdots = a_{2n} = 0$$

[illegible] $a_{ki} = \bar{a}_{ik}$.

Beweis des Satzes V. [illegible] $A = \epsilon \underline{1}$. [illegible]

über die mit einer irreduzibelen Gruppe vertauschbaren Abbildungen:

[illegible] a_i [illegible]

$$\sum_{i,k=1}^{f} e_{ik}\, x_i y_k \qquad (e_{ki} = -e_{ik}).$$

[illegible] $(x_1 \ldots x_f)$ [illegible] $[xy]$ [illegible] $x = (x_i)$, $y = (y_i)$. [illegible] $x_1 \neq 0$. [illegible] $[x_1, x] = 0$ [illegible] $[x_1, x_2] = 1$. [illegible]

$[x_1 x] = 0, \quad [x_2 x] = 0$

[illegible] $f-2$ [illegible] $x = x_3, \ldots, x_f$. [illegible] x_1, x_2 [illegible]

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_f x_f = 0.$$

[illegible] $[x_1 x] = +\xi_2, \quad [x_2 x] = -\xi_1$, [illegible] $\xi_1 = 0, \xi_2 = 0$ [illegible] $x_1, \ldots, x_f$ [illegible]

[illegible] $(\xi_i), (\eta_i)$ [illegible] x, y [illegible]

$$[xy] = \sum_{i,k=1}^{f} g_{ik}\, \xi_i \eta_k.$$

[illegible] $g_{ik} = [x_i x_k]$

$$g_{11} = 0, \; g_{12} = 1; \; g_{13} = 0, \; \ldots, \; g_{1f} = 0$$

$$g_{21} = -1, \; g_{22} = 0; \; g_{23} = 0, \; \ldots, \; g_{2f} = 0.$$

[illegible] g_{i1}, g_{i2} [illegible] $i = 3, \ldots, f$ [illegible] g_{ik} [illegible]

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$$ [illegible] $(f-2)$ [illegible]

[illegible] f [illegible]

(5)

Neue Fassung d. Einleitung:

S. 3 [illegible]

[illegible]

H

[illegible]

Neue Fassung des zweiten Teils (1)

II. Teil. Die Abelsche Gruppe als Ausdruck der Kinematik eines physikalischen Systems.

[illegible]

[illegible] $\xi(s)$ [illegible]

[illegible] *)

*) [illegible]

[illegible] $\xi(s)$, [illegible] $\sum_s \xi(s) \cdot s$ [illegible] $U(s)$ [illegible]

$$X = \sum_s \xi(s)\, U(s).$$

[illegible] X, Y, [illegible] ξ, η [illegible] Z, [illegible] ξ, η [illegible]

$$Z = XY = \sum_{t,t'} U(t)U(t')\,\xi(t)\eta(t') = \sum_{t,t'} U(tt')\,\xi(t)\eta(t')$$

$$= \sum_s U(s)\,\zeta(s),$$

( )
$$\zeta(s) = \sum_{tt'=s} \xi(t)\eta(t').$$

[illegible] t, t', [illegible] $tt' = s$ [illegible] t [illegible]

$$\zeta(s) = \sum_t \xi(st^{-1})\eta(t) = \sum_t \xi(t)\eta(t^{-1}s).$$

( ) [illegible]

[illegible] ~~$\xi\eta = 0$ [illegible]~~ [illegible]

[illegible] ξ [illegible]

$$\xi(s^{-1}) = \overline{\xi}(s)$$

[illegible] X [illegible] $\overline{U}^*(s)\,U(s) = 1$

$$U(s)\,U(s^{-1}) = 1$$

[illegible] $\overline{U}^*(s) = U(s^{-1})$ [illegible] ( ) [illegible]

$$\overline{X}^* = \sum_s \overline{\xi}(s)\,\overline{U}^*(s) = \sum_s \xi(s^{-1})\,U(s^{-1}) = \sum_s \xi(s)\,U(s) = X.$$

[illegible] *)

*) [illegible] I. Schur ... [illegible]

VI Alter Text: Abelsche Gruppen

[illegible]

*) [illegible] I. [illegible]

[illegible]

( ) $U(s)\,U(t) \simeq U(st)$

[illegible]

$$U(s)\,U(t) = \delta(s,t)\,U(st),$$

[illegible] $\varepsilon^{-1}(s)\,\xi(s)$ [illegible] $\zeta = \xi\eta$ [illegible]

$$\zeta(s) = \sum_{tt'=s} \delta(t,t')\,\xi(t)\,\eta(t')$$

[illegible] $U^{-1}(s) = U(s^{-1})$ [illegible] A [illegible] $U(s)$ [illegible]

$$A^{-1}\,U(s)\,A = U(s),$$

[illegible] $A \simeq 1$.

[illegible]

$$1,\ a,\ a^2,\ \ldots\ a^{h-1} \quad (a^h = 1).$$

[illegible] $A^h = \varepsilon\underline{1}$ [illegible] $\sqrt[h]{\varepsilon}$ [illegible] $A^h = \underline{1}$ [illegible] $1, a, b, c$ [illegible]

$$a^2 = b^2 = c^2 = 1,$$

$$bc = cb = a, \quad ca = ac = b, \quad ab = ba = c.$$

[illegible]

$$U(1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad U(a) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad U(b) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad U(c) = \begin{vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{vmatrix}.$$

[illegible] $U^2(a) = \underline{1}$ [illegible] $U(a)\,U(a^{-1}) = 1$ [illegible]

$\frac{1}{2}$ $\rho 1 + \xi a + \eta b + \zeta c$ [illegible]

$$X = \begin{Vmatrix} \rho + \xi, & \eta + i\zeta \\ \eta - i\zeta, & \rho - \xi \end{Vmatrix}$$

r 9 3

051

(2)

[illegible]

VIb → [illegible]

§6. Übertragung auf kontinuierliche Gruppen.

[illegible] $\mathfrak{x} = x_i$ [illegible] $d\mathfrak{x} = (dx_i)$ [illegible] $dx = c\,x\,dt$ [illegible] $(x \sim e^{ct}\cdot x$ [illegible]

$$(1)\quad \frac{d\mathfrak{x}}{d\tau} = \mathfrak{x}\mathfrak{C}, \qquad \frac{dx_k}{d\tau} = \sum_{i=1}^{n} c_{ik}\,x_i .$$

[illegible] $\sum x_i \bar{x}_i$ [illegible]

$$\sum_k \left(\bar{x}_k \frac{dx_k}{d\tau} + x_k \frac{d\bar{x}_k}{d\tau} \right) = 0$$

[illegible]

$$\sum_{i,k} (c_{ik} + \bar{c}_{ki})\, x_i \bar{x}_k = 0$$

[illegible]

$$\bar{c}_{ki} = -c_{ik} \qquad \bar{\mathfrak{C}}^* = -\mathfrak{C}.$$

[illegible] $\mathfrak{C} = i\mathfrak{A}$ [illegible]

A [illegible] $[\ldots]$ [illegible]

$$\frac{d\mathfrak{x}}{d\tau} = i\mathfrak{x}\mathfrak{A}$$

[illegible]

[Margin note:] [illegible] $\frac{d\mathfrak{x}}{d\tau} = i\mathfrak{C}\mathfrak{x}$, [illegible] $A \sim (A + \mathfrak{C}\mathbf{1})$ [illegible]

[illegible]

$$\mathfrak{x}(\tau) = \mathfrak{x}\,U(\tau)$$

$U(\tau)$ [illegible]

$$U(\tau + \tau') = U(\tau)\,U(\tau').$$

[illegible] $\mathbf{1} + \frac{\tau\mathfrak{C}}{m}$ [illegible] $\frac{\tau}{m}$ [illegible]

$$U(\tau) = \lim_{m=\infty} \left(\mathbf{1} + \frac{\tau\mathfrak{C}}{m} \right)^m = e^{\tau\mathfrak{C}}$$

[illegible]

$$U(\tau) = \mathbf{1} + \frac{\tau}{1!}\mathfrak{C} + \frac{\tau^2}{2!}\mathfrak{C}^2 + \cdots$$

[illegible] $\mathfrak{x}_0(t)$ [illegible] $(Z-1)$ [illegible]

$$\frac{d\mathfrak{x}_Z}{d\tau} = \mathfrak{x}_{Z-1}\mathfrak{C} \qquad \mathfrak{x}_Z(\tau) = \mathfrak{x} + \int_0^\tau \mathfrak{x}_{Z-1}\mathfrak{C}\,d\tau$$

[illegible shorthand] $\mathfrak{x}_q(\tau)$ [illegible shorthand] $\mathfrak{x}(\tau)$ [illegible shorthand] $U(\tau)$

[illegible shorthand]

$$\sum_{q=0}^{\infty} \iint\cdots\int_{(0\le\tau_1\le\cdots\le\tau_q\le\tau)} \mathfrak{C}(\tau_1)\,\mathfrak{C}(\tau_2)\cdots\mathfrak{C}(\tau_q)\,d\tau_1\,d\tau_2\cdots d\tau_q .$$

[illegible shorthand] S. 16 – 17 [illegible shorthand]

[illegible shorthand] S. 18 [illegible shorthand]

[illegible shorthand]

$$\mathfrak{C}_1\,d\sigma_1 + \mathfrak{C}_2\,d\sigma_2 + \cdots + \mathfrak{C}_f\,d\sigma_f ,$$

[illegible shorthand] $d\sigma_i = \alpha_i\,d\tau$ [illegible shorthand] $d\sigma_i = \alpha_i\,d\tau$ [illegible shorthand]

$$U(\sigma_1,\ldots,\sigma_f) = e^{\sigma_1\mathfrak{C}_1+\cdots+\sigma_f\mathfrak{C}_f}$$

[illegible shorthand]

$$\mathfrak{C}' = \alpha_1'\mathfrak{C}_1 + \alpha_2'\mathfrak{C}_2 + \cdots + \alpha_f'\mathfrak{C}_f ,$$

[illegible shorthand] $1+\mathfrak{C}\,d\tau$ [illegible shorthand]

$$(1+\mathfrak{C}'d\tau)\,U = U + \mathfrak{C}'U\,d\tau, \quad U(1+\mathfrak{C}'d\tau) = U + U\mathfrak{C}'\,d\tau$$

[illegible shorthand]

$$U(1+\mathfrak{C}'d\tau')\,U^{-1}$$

[illegible shorthand] $U\mathfrak{C}'U^{-1}$ [illegible shorthand] $1+\mathfrak{C}\,d\tau$ [illegible shorthand]

$$U\mathfrak{C}'U^{-1} = (1+\mathfrak{C}\,d\tau)\,\mathfrak{C}'(1-\mathfrak{C}\,d\tau) = \mathfrak{C}' + (\mathfrak{C}\mathfrak{C}'-\mathfrak{C}'\mathfrak{C})\,d\tau$$

[illegible shorthand] $\mathfrak{C}\mathfrak{C}'-\mathfrak{C}'\mathfrak{C}$ [illegible shorthand]

[illegible shorthand]

$$d\mathfrak{x} = \mathfrak{x}\,\mathfrak{C}\,d\tau, \quad d'\mathfrak{x} = \mathfrak{x}\,\mathfrak{C}'\,d'\tau .$$

[illegible shorthand] d, d' [illegible shorthand] $d'd$ [illegible shorthand]

$$\Delta\mathfrak{x} = dd'\mathfrak{x} - d'd\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\mathfrak{C}\mathfrak{C}'-\mathfrak{C}'\mathfrak{C})\,d\tau\,d'\tau$$

[illegible shorthand]

Margin notes:

[illegible shorthand]

$\delta dx - d\delta x$

$U[1+d\mathfrak{C}'U - \ldots]$, $U\mathfrak{C}'U - U\mathfrak{C}$

$e^{C\tau}e^{C'\tau'}e^{-C\tau}e^{-C'\tau'}$

$-e^{C'\tau'}Ce^{-C'\tau'}$

$UV U^{-1}V^{-1}$

BA, AB

(3)

[illegible]

$$\mathfrak{C}\mathfrak{C}' - \mathfrak{C}'\mathfrak{C}$$

[illegible] $\mathfrak{C}_i\mathfrak{C}_k - \mathfrak{C}_k\mathfrak{C}_i$ [illegible] $\mathfrak{C}_1, \dots, \mathfrak{C}_f$ [illegible] $= \mathbf{1}$ [illegible]

$$e^{\sigma A + \tau B} = e^{\sigma A}\cdot e^{\tau B}$$

[illegible]

$$U(\sigma_1 \dots \sigma_f)\, U(\tau_1 \dots \tau_f) = U(\sigma_1+\tau_1, \dots, \sigma_f+\tau_f).$$

[illegible]

$$\mathfrak{C}_\mu \mathfrak{C}_\nu - \mathfrak{C}_\mu \mathfrak{C}_\nu = i c_{\mu\nu}\, \mathbf{1};$$

[illegible]

$$A = \sigma_1 \mathfrak{C}_1 + \dots + \sigma_f \mathfrak{C}_f, \quad B = \tau_1 \mathfrak{C}_1 + \dots + \tau_f B_f$$

$$AB - BA = i \sum_{\mu\nu} c_{\mu\nu}\sigma_\mu \tau_\nu \cdot \mathbf{1}$$

[illegible]

$$\sum c_{\mu\nu}\sigma_\mu\tau_\nu = k(\sigma,\tau)$$

[illegible] $1 + \frac{A}{m}$, $1 + \frac{B}{m}$ [illegible]

$$U(\sigma_1 \dots \sigma_f) = U(\sigma)$$

$$U(\sigma)U(\tau)U(\sigma)^{-1}U(\tau)^{-1} = e(k(\sigma,\tau))\cdot \mathbf{1}.$$

[illegible] e^{ix} [illegible]

$$= e\left(\tfrac{1}{2} k(\sigma,\tau)\right).$$

$$U(\sigma+\tau) = e\left(\tfrac{1}{2} k(\sigma,\tau)\right) U(\tau)\cdot U(\sigma) = e\left(-\tfrac{1}{2} k(\sigma,\tau)\right) U(\sigma)U(\tau)$$

[illegible] $U(\tau)$ [illegible] $U(\sigma)$ [illegible] $k(\sigma,\tau)$ [illegible]

Margin: e^{A}, e^{B}; $A^i B^k - B^k A^i$; $(AB - BA)A^i$

[illegible shorthand] $\| c_{ik} \|$ [illegible shorthand] $\left\| \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \right\|$ [illegible shorthand] σ_1, τ_1; iP_ν, iQ_ν $(\nu = 1, \dots, f)$ [illegible shorthand] P, Q [illegible shorthand]

$$i(P_\nu Q_\nu - Q_\nu P_\nu) = 1, \quad i(P_\mu Q_\nu - Q_\nu P_\mu) = 0 \text{ für } \mu \neq \nu$$

$$P_\mu P_\nu - P_\nu P_\mu = 0, \quad Q_\mu Q_\nu - Q_\nu Q_\mu = 0 \text{ für } \mu, \nu.$$

$$U(\sigma) = e(\sigma_1 P_1 + \dots + \sigma_f P_f)$$

[illegible shorthand]

$$V(\tau) = e(\tau_1 Q_1 + \dots + \tau_f Q_f).$$

[illegible shorthand]:

$$U(\sigma)\, V(\tau)\, U^{-1}(\sigma)\, V^{-1}(\tau) = e(\sigma_1 \tau_1 + \dots + \sigma_f \tau_f)\, 1$$

$$e(\sigma_1 P_1 + \dots + \sigma_f P_f + \tau_1 Q_1 + \dots + \tau_f Q_f) = e\left(\tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{f} \sigma_i \tau_i\right) V(\tau)\, U(\sigma)$$

$$= e\left(-\tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{f} \sigma_i \tau_i\right) U(\sigma)\, V(\tau)$$

2. Ersetzung der kanonischen Variablen durch die Gruppe. Das Elektron.

VIIb unten, VII Rückseite, VIII oben, VIIIa [illegible] !!!

[illegible shorthand]

[illegible shorthand] s_x, s_y, s_z [illegible shorthand] $(1, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$. [illegible shorthand] $n = 2$ [illegible shorthand]

VIIIa †

(4)

Kap. III. Das dynamische Problem.

1. [illegible]

[illegible]

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{2\pi i}{h}\cdot q\,\mathfrak{E}.$$

[illegible]

$$dA = \frac{2\pi i\,dt}{h}(A\mathfrak{E} - \mathfrak{E}A).$$

$d\mathfrak{E} = 0.$ [illegible]

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 x_1\bar{x}_1 + \mathfrak{E}_2 x_2\bar{x}_2 + \dots + \mathfrak{E}_n x_n\bar{x}_n,$$

[illegible]

$$\frac{dx_\nu}{dt} = -\frac{2\pi i\,\mathfrak{E}_\nu}{h}\,x_\nu.$$

[illegible]

$$x_\nu(t) = x_\nu\cdot e\left(-\frac{2\pi \mathfrak{E}_\nu}{h}\right).$$

[illegible]

$$A(q) = \sum_{\mu\nu} a_{\mu\nu}\,x_\mu\bar{x}_\nu$$

[illegible]

$$\sum_{\mu\nu} a_{\mu\nu}\,x_\mu(t)\,\bar{x}_\nu(t) = \sum_{\mu\nu} a_{\mu\nu}(t)\,x_\mu\bar{x}_\nu$$

$$a_{\mu\nu}(t) = a_{\mu\nu}\cdot e\left(\frac{2\pi t(\mathfrak{E}_\nu - \mathfrak{E}_\mu)}{h}\right)$$

[illegible] $a_{\mu\nu}$ [illegible] $\mathfrak{E}_\nu$ [illegible]

Bohr [illegible] $|x_\nu(t)|^2 = |x_\nu|^2$ [illegible]

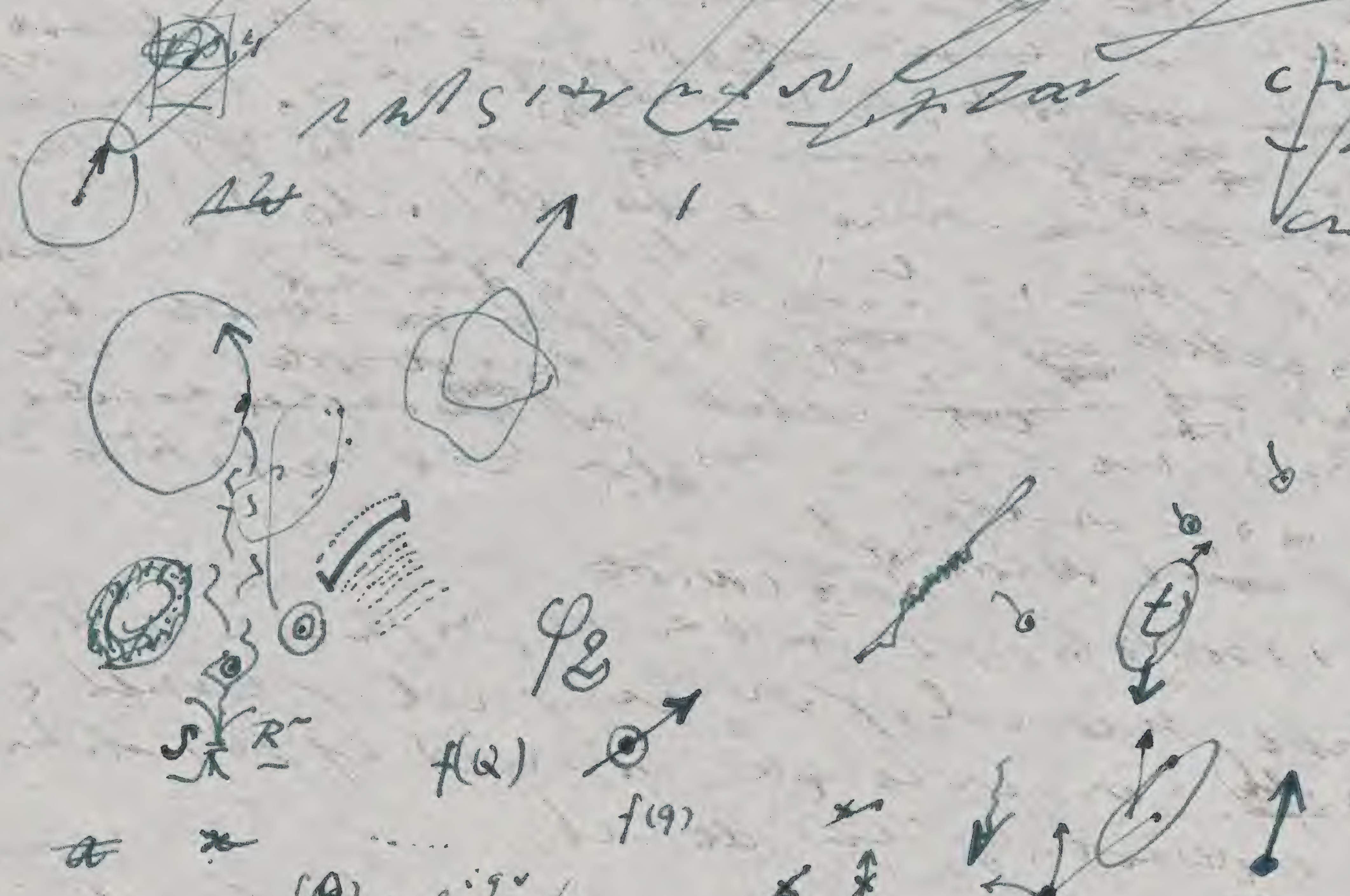
[illegible] S. 19 f. – S. 20 [illegible]

[illegible] $q(t)$ [illegible] $q(t)$ [illegible]

S. 20 v. M. Born

[illegible]

S. 20 (Parentheses)



$x_\mu = c_\mu e^{i t \mu}$

$f(Q)$

$f(q)$

$f(Q) = e^{iqx} f$

$$f(Q) = \int e^{iQ\xi} \varphi(\xi)\, d\xi$$

$f \quad \int e^{iq\xi} \varphi(\xi)\, d\xi$

$\frac{R(PQ)}{R}$

$$0 = \iint e^{i(P\xi + Q\eta)} \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

[illegible]

$= \iint e^{i(p\xi + q\eta)} \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$

$F = \iint e^{i(p\xi + q\eta)} \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$

$f_p = \frac{\partial f}{\partial p},\ f_q = \frac{\partial f}{\partial q}$

$F_r = $ VIII

[illegible]

(4.)

[illegible]

DSI

Diophant. Appr. — H. Weyl, [illegible] Math. Ann. 77 (1916), S. 313; [illegible] 5, S. 319. [illegible]

Dissertation — ~~Göttingen 1908, S. [illegible]~~. Math. Ann. 66 (1908), S. 307–309; 317–324

Gruppentheorie — F. Peter u. H. Weyl, [illegible] Math. Ann 97 (1927), S. 737

H. Weyl, [illegible], Math. Ann. 97 (1926), S. 338.

I. Schur, [illegible] Crelles Journal 127 (1904), S. 20–50

[illegible] Crelles J. 132 (1907), S. 85–137

I. Schur, [illegible] Sitzungsber. der Akad. 1905, S. 406

Fouriertheoreme — N. Wiener, The representation of functions by trigonometrical integrals, Math. Zeitschr. 24 (1926), S. 575.

S. Bochner u. G. H. Hardy, Note on two theorems of N. Wiener, Journ. Lond. Math. Soc. 1 (1926), S. 240.

S. Bochner, [illegible] Math. Ann. 97 (1927), S. 635.

Plancherel, Rend. Circolo Mat. di Palermo 30, 330, 1910.

Titchmarsh, Lond. Math. Soc. Proc. (2) 23, 279, 1924.

Infin. Gruppen — R. Courant u. D. Hilbert, [illegible] (Berlin 1924), S. 27–30.

H. Weyl, [illegible], Berlin 1923, S. 33–36.

Quadr. Formen — Cour. Hilbert, S. 9–24.

Schrödinger — Schr., [illegible], Leipzig 1927. [illegible] „Quantisierung als Eigenwertproblem" in Annalen d. Physik (4) 79, 1926 – (4) 81, 1926.

Experiment — Stern u. Gerlach, [illegible] 7, 1921, S. 249

Beide, [illegible] 8 (1922) S. 110

ISD

76278 8

Zitate.

J. v. Neumann, [illegible] 1927, S. 1–57.

~~[illegible]~~

[illegible] D. Hilbert, J. v. Neumann, L. Nordheim, [illegible] Math. Ann. 98 (1927), S. 1–30 — P. Jordan, [illegible], Zeitschr. f. Phys. 40 (1927), S. 809–838; 44 (1927), S. 1–25.

~~[illegible]~~ II, S. 21–25.

Magnetelektron — W. Pauli jr., [illegible]

W. Heisenberg u. P. Jordan, [illegible] Zeeman [illegible].

7695

Lichtquanten — P. Jordan, [illegible] Zeitschr. f. Phys. 44 (1927), S. 292–300.

→ P. A. M. Dirac, Proc. Royal Soc. (A), 113 (1927), S. 621.

7384

Gruppen- u. Quantentheorie — E. Wigner, [illegible] Zeitschr. f. Phys. 40 (1926), S. 492–500; 40 (1927), S. 883–892

~~[illegible]~~, [illegible] Zeitschr. f. Phys. 43 (1927), S. 624–652.

Anschaulicher Inh. — W. Heisenberg, Zeitschr. f. Phys. 43 (1927), S. 172.

Allgemeine Erklg. — W. Heisenberg, ZS. f. Phys. 33 (1925), 879. M. ~~Jordan~~ Born u. P. Jordan a. a. O. 34 (1925), S. 858. 35 (1926), S. 557–615. (II + W. Heisenberg)

Vertauschungsrel. — [illegible] S. 573, [illegible] (3)

Einwirkung v. äußer. — M. Born, Zeitschr. f. Phys. 38 (1926), S. 803, 40 (1926), S. 167. [illegible]

Hermitesche Formen — D. Hilbert, [illegible], Abschn. IV. [illegible] (Leipzig 1912). E. Hellinger, Crelles Journal 136 (1910), S. 1.

Stieltjes' [illegible] Kettenbrüche — [illegible] E. Hellinger, [illegible] Stieltjes' [illegible], Hilbert-Festschrift Berlin 1922, S. 343 [illegible] H. Weyl, Math. Ann. 68 (1910), S. 220. 9 (1922), 349, 353. 26 (1924), 166.

Math. Ann. 86 (1922), S. 18.

$$1 + i\,h(\sigma,\tau)$$

$$U(\sigma)\,\underline{U(\tau)} = e(h(\sigma,\tau))\,U(\sigma)\,U(\sigma)$$

$$(1 + \sum \tau_i C_i)$$

$$U(\sigma) + \sum \tau_i\, U(\sigma) C_i = (1 + i\,h(\sigma,\tau) + \sum \tau_i C_i)\,U(\sigma)$$

$$U(\sigma) C_i - C_i U(\sigma) = i \ldots \quad \begin{cases} i \cdot -\sigma_2 U \\ i \cdot \sigma_1 U \end{cases}$$

$$\sigma_3 \quad \sigma_1 \sigma_2'$$

$$\sigma_1 \tau_2^{x} - \sigma_2 \tau_1$$

[illegible] – [illegible] – petit [illegible]:

[illegible]: [illegible].

I. [illegible]

§1. [illegible]

§2. [illegible]

§3. [illegible]

§4. [illegible]

II. [illegible]

§5. [illegible]

§6. [illegible]

§7. [illegible]

§8. [illegible]

III. [illegible]

§9. [illegible]

§10. [illegible] Coulomb'[illegible]

[illegible]

Seite 9, Z. 14 ~~[illegible]~~ – 11 v. u.:

[illegible]

(9) $\mu(\mathcal{H}_x\sigma_x + \mathcal{H}_y\sigma_y + \mathcal{H}_z\sigma_z)$,

[illegible] $\mu = \dfrac{eh}{4\pi mc}$. Bohr'[illegible] ([illegible]). [illegible] Goudsmit [illegible] Uhlenbeck [illegible] (9) [illegible] 6 [illegible]

Seite 8, [illegible] Zeile 11:

[illegible] *)

*) [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible] ~~[illegible]~~

Seite 29, 4. Zeile v. unten [illegible] Seite 30, 1. Zeile [illegible] 2 [illegible] $e^{i\xi q n}$

Seite 33, Z. 15 ~~v. o.~~ – 19 v. o.

[illegible] $\frac{2\pi}{q}$ [illegible] $k\xi$ [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible] μ (– [illegible] + [illegible] . ([illegible] $k\xi$ mod. [illegible] ξ [illegible]; 6 [illegible] $\frac{2\pi}{q}$, [illegible]) ~~[illegible]~~ x_x [illegible]

S. 2, 1. 2. Zeile: [illegible]

[illegible] (O fordan [illegible]) [illegible]

[illegible]

[illegible] Dr. fordan [illegible]

[illegible] Kopenhagen (Dänemark!), [illegible]

[illegible]

DSI

Zs. f. Phys. (76 Blatt Ms. und 1 Figurenanlage) #281

Quantenmechanik und Gruppentheorie

von H. WEYL in Zürich.

(Eingegangen am 13. Oktober 1927)

Einleitung und Zusammenfassung.

In der Quantenmechanik kann man zwei Fragen deutlich voneinander trennen: 1) Wie komme ich zu der Matrix, der Hermiteschen Form, welche eine gegebene Grösse in einem seiner Konstitution nach bekannten physikalischen System repräsentiert? 2) Wenn einmal die Hermitesche Form gewonnen ist, was ist ihre physikalische Bedeutung, was für physikalische Aussagen kann ich ihr entnehmen? Auf die zweite Frage hat Hr. v.Neumann in einer kürzlich erschienenen Arbeit [1] eine klare und weitreichende Antwort gegeben. Aber sie spricht noch nicht Alles aus, was sich darüber sagen lässt, umfasst auch nicht alle Ansätze, die bereits in der physikalischen Literatur mit Erfolg geltend gemacht worden sind. Ich glaube, dass ich in dieser Hinsicht zu einem gewissen Abschluss gelangt bin durch die Aufstellung des Begriffs des reinen Falls. Ein reiner Fall von Atomen z.B. liegt dann vor, wenn der betrachtete Atomschwarm den höchsten Grad von Homogenität besitzt, der sich realisieren lässt. Der monochromatische polarisierte Lichtstrahl ist ein Beispiel aus anderm Gebiet. Der reine Fall wird repräsentiert durch die Variablen der Hermiteschen Form; die Form selber gibt Aufschluss darüber, welcher Werte die durch sie repräsentierte Grösse fähig ist und mit welcher Wahrscheinlichkeit oder Häufigkeit diese Werte in irgend einem vorliegenden reinen Fall angenommen werden. Auf diese Theorie des reinen Falls gründet sich erst die Statistik der Gemenge; v.Neumanns Ansatz bezog sich lediglich auf eine bestimmte Frage in diesem Gebiet.

Der II. Teil handelt von der tiefer greifenden Frage 1). Sie hängt aufs engste zusammen mit der Frage nach dem Wesen und der rich-

---

1) Mathematische Begründung der Quantenmechanik, Nachr. Gesellsch. d. Wissensch. Göttingen 1927, S. 1.

allgemeinen Definition der kanonischen Variablen. Ein Versuch in dieser Richtung ist von Herrn Jordan unternommen worden [2]. Doch enthalten seine Entwicklungen eine ernstliche Lücke - indem aus seinen Definitionen und Axiomen nicht hervorgeht, dass einer Funktion $f(q)$ der Lagekoordinaten q diejenige Matrix $f(Q)$ zugeordnet ist, die nach dem gleichen Funktionsgesetz aus den q repräsentierenden Matrizen Q gebildet ist; geschweige denn, dass etwas Derartiges für Funktionen der Lage- und Impulskoordinaten geleistet würde. Ohne einen solchen Zusatz ist aber sein Schema inhaltsleer. Ausserdem ist seine Fassung des Begriffs der kanonischen Variablen mathematisch unbefriedigend und physikalisch nicht haltbar. Hier glaube ich mit Hülfe der Gruppentheorie zu einer tieferen Einsicht in den wahren Sachverhalt gelangt zu sein. [3] Der innere prinzipielle Grund für die kanonische Paarung tritt dadurch deutlich hervor, die sich einstellt, wenn die zugrunde liegende Gruppe eine kontinuierliche ist; aber der Ansatz umspannt zugleich die diskreten Fälle wie das magnetische Elektron (Vierergruppe), wo von einer kanonischen Paarung vernünftigerweise nicht mehr die Rede sein kann. Im kontinuierlichen Gebiet mache ich gegenüber dem differentiellen den integralen Standpunkt geltend, indem ich überall die infinitesimale

---

[2] Ueber eine neue Begründung der Quantenmechanik, Zeitschr. f. Physik 40, 809, 1927; 44, 1, 1927. Vergl. ferner P.A.M. Dirac, Proc. Royal Soc. (A) 113, 621, 1927, und: D. Hilbert, J.v. Neumann, L. Nordheim, Ueber die Grundlagen der Quantenmechanik, Math. Annalen 98, 1, 1927.

[3] Diese Verknüpfung mit der Gruppentheorie liegt in ganz anderer Richtung als die Untersuchungen von Herrn Wigner, die erkennen lassen, dass die Struktur der Spektren nach ihrer qualitativen Seite hin durch die bestehende Symmetriegruppe bestimmt ist (Mehrere Arbeiten in der Zeitschr. f. Physik 40, 492 u. 883, 43, 624 (1926/27)).

Gruppe, an welche die Formulierung bisher sich klammerte, durch die volle kontinuierliche Gruppe ersetze. Der Uebergang zu Schrödingers Wellengleichungen lässt sich dann in aller Strenge vollziehen.

Als wieteren Erfolg meines Ansatzes möchte ich ~~noch~~ anführen, dass er gestattet, den Funktionalausdruck einer Grösse wie etwa der Energie durch die kanonischen Variablen nach einer eindeutigen Vorschrift auf die Matrizen zu übertragen, um was für Funktionen es sich auch handeln mag; während die bisherige Fassung sich ernstlich nur auf Polynome bezog und auch dann noch dahingestellt bleiben musste, ob man ein Monom wie p^2q im Matrizenkalkül als p^2q oder qp^2 oder pqp oder als eine Kombination von dem Allen zu interpretieren hatte.

NB: Absatz!

Die Durchführung konkreter Fälle verlangt ~~noch~~ die Lösung des dynamischen Problems. Das ist wohl im Grunde die Aufgabe, unter den Grössen des Gruppengebiets diejenigen zu ermitteln, welche den gemessenen Ort und die gemessene Zeit bedeuten. Hier liegt ein Schema bisher nur für den Fall vor, dass die Zeit als einzige unabhängige Veränderliche auftritt (Ausschluss der Feldtheorie) und dass die Zeit auch nur als unabhängige Variable, nicht als reale Zustandsgrösse vorkommt (Ausschluss der eigentlichen Relativitätsmechanik). Dennoch lässt sich wenigstens der relativistische Ansatz der kinetischen Energie ohne weiteres in die Quantenmechanik übertragen. Ich behandle diese Dinge im letzten Kapitel mehr zur Illustration der allgemeinen Theorie. Die Analoga der Schrödingerschen Schwingungsgleichungen sind dabei keine eigentlichen Differentialgleichungen, sondern anstelle der gewöhnlichen Differentiation treten differentiationsartige Prozesse.

Ueber die benötigten mathematischen Begriffe und Tatsachen habe ich in eingeschobenen Absätzen kurz referiert. In einem Anhang sind die wichtigsten mathematischen Fundamente der Theorie durch Beweise gestützt worden. Dem physikalischen Leser hoffe ich damit mehr zu dienen als mit Hinweisen auf die mathematische Literatur, die ihm das hier Erforderliche meist nur in Verschlingung mit anderen ihn nicht interessierenden Dingen bietet.

I. Teil. Bedeutung der Repräsentation von physikalischen Gössen durch Hermitesche Formen.

§1. Mathematische Grundbegriffe, die Hermiteschen Formen betreffend.

Die in der Ueberschrift angekündigten Grund-Begriffe und -Tatsachen stelle ich hier in der Nomenklatur der mehrdimensionalen

analytischen Geometrie kurz zusammen. Das Abweichende von der gewöhnlichen n-dimensionalen Geometrie liegt darin, dass die Komponenten der Vektoren

(1) $$\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

nicht nur relle, sondern beliebige komplexe Zahlen sein können, und dass als Quadrat des Betrages eines Vektors dementsprechend die "Hermitesche Einheitsform"

(2) $$|\mathfrak{x}|^2 = x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \cdots + x_n\bar{x}_n$$

der Metrik zugrunde liegt (der Querstrich bedeutet den Uebergang zur konjugiert komplexen Zahl). Vektoren (1) werden in der üblichen Weise mit Zahlen multipliziert und addiert. Sie bilden eine n-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit, den Vektorraum oder Vektorkörper $\mathfrak{R}_n$; d.h. es lassen sich auf mancherlei Art n Vektoren $\mathfrak{e}_1^*, \mathfrak{e}_2^*, \cdots, \mathfrak{e}_n^*$ so auswählen, dass jeder Vektor $\mathfrak{x}$ auf eine und nur eine Weise in der Form

$$\mathfrak{x} = x_1^*\mathfrak{e}_1^* + x_2^*\mathfrak{e}_2^* + \cdots + x_n^*\mathfrak{e}_n^*$$

sich darstellen lässt. Wird z.B. $\mathfrak{e}_i^*$ als der Vektor $\mathfrak{e}_i = (0, 0, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$ gewählt (1 steht an i^{ter} Stelle), so fallen die "Komponenten x_i^* von $\mathfrak{x}$ inbezug auf das Koordinatensystem $(\mathfrak{e}_1^*, \mathfrak{e}_2^*, \cdots, \mathfrak{e}_n^*)$" mit den "absoluten Komponenten" x_i zusammen. Ein Koordinatensystem, in welchem das Quadrat des Betrages von $\mathfrak{x}$ sich durch die Komponenten x_i des willkürlichen Vektors $\mathfrak{x}$ mittels der Formel (2) ausdrückt, heisse normal. Alle normalen Koordinatensysteme sollen als gleichberechtigt gelten, das durch unsern arithmetischen Ausgangspunkt bedingte spezielle Koordinatensystem $(\mathfrak{e}_i)$ soll unter ihnen seine ausgezeichnete Stellung verlieren. In Zukunft bedeutet daher auch $\mathfrak{e}_i$ ein beliebiges normales Koordinatensystem, x_i die darauf bezüglichen Komponenten des Vektors $\mathfrak{x}$. Die Formeln für den Uebergang vom Koordinatensystem $\mathfrak{e}_i$ zu einem andern $\mathfrak{e}_i'$ lauten allgemein:

$$\mathfrak{e}_i' = \sum_k e_{ik}\,\mathfrak{e}_k, \qquad (3) \quad x_k = \sum_i e_{ik}\,x_i'.$$

Die Bedingungen, welche die Koeffizienten e_{ik} erfüllen müssen, damit eine "unitäre Transformation" vorliegt, welche zwischen zwei normalen Koordinatensystemen vermittelt, sind leicht aus der Definition zu ermitteln und entsprechen genau den aus der elementaren analytischen Geometrie geläufigen. Wenn wir mit $\mathfrak{E}$ die Matrix $\|e_{ik}\|$ bezeichnen und der * das Transponieren einer Matrix, die Vertauschung von Zeilen und Spalten bedeutet, $\mathbf{1}$ aber die die Identität darstellende Ein-

heitsmatrix, so lauten sie:

$$\mathfrak{E}\bar{\mathfrak{E}}^* = \bar{\mathfrak{E}}^*\mathfrak{E} = \underline{1}.$$

Die Formeln (3) oder, wie ich jetzt lieber schreiben will:

$$(4) \qquad x_k' = \sum_i e_{ik} x_i$$

haben bekanntlich noch eine zweite Bedeutung: sie stellen, unter Zugrundelegung des festen normalen Koordinatensystems der $\mathfrak{u}_i$, eine unitäre Abbildung des Vektorraums auf sich selber dar, vermöge deren dem Vektor $\mathfrak{x} = \sum x_i \mathfrak{u}_i$ der Vektor $\mathfrak{x}' = \sum x_i' \mathfrak{u}_i$ zugeordnet wird. Ich bezeichne diese Abbildung kurz mit: $\mathfrak{x}' = \mathfrak{x}\mathfrak{E}$. Dann drückt sich die Zusammensetzung zweier Abbildungen

$$\mathfrak{x}' = \mathfrak{x}\mathfrak{E}, \qquad \mathfrak{x}'' = \mathfrak{x}'\mathfrak{E}'$$

naturgemäss durch $\mathfrak{x}'' = \mathfrak{x}(\mathfrak{E}\mathfrak{E}')$ aus - $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}'$ folgen sich von links nach rechts, wie wir zu lesen gewohnt sind -, und man befindet sich in Einklang mit der üblichen Festsetzung des Matrizenkalküls, nach welcher aus

$$\mathfrak{E} = \|e_{ik}\|, \qquad \mathfrak{E}' = \|e_{ik}'\|$$

durch Komposition die Matrix $\mathfrak{E}\mathfrak{E}'$ mit den Koeffizienten

$$\sum_r e_{ir} e_{rk}'$$

entsteht. - Der geometrische Standpunkt kommt darauf hinaus, dass wir im Vektorraum nur solche ~~Beg~~ Verhältnisse studieren, welche invariant sind gegenüber beliebigen unitären Abbildungen. Es ist noch bequem, neben (2) das skalare Produkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ zweier Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ durch

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \cdots + x_n\bar{y}_n$$

einzuführen. $(\mathfrak{y}\mathfrak{x})$ ist das Konjugierte zu $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$. Man wird zwei Vektoren senkrecht aufeinander nennen, wenn ihr skalares Produkt verschwindet.

Zwei von 0 verschiedene Vektoren gehören demselben Strahl an, wenn der eine aus dem andern durch Multiplikation mit einer (komplexen, von 0 verschiedenen) Zahl hervorgeht. Ein Strahl kann eindeutig bezeichnet werden durch einen ihm angehörenden Vektor $\mathfrak{x}$ vom Betrage 1 (Einheitsvektor). Aber dieser ist seinerseits durch den Strahl nicht eindeutig bestimmt, sondern anstelle von $\mathfrak{x}$ kann mit gleichem Recht jeder Vektor $\varepsilon\mathfrak{x}$ treten, der aus ihm durch Multiplikation mit einer beliebigen Zahl ε vom absoluten Betrage 1 hervorgeht. Das ist wesentlich anders als im gewöhnlichen Raum, wo nur die Doppeldeutigkeit

eines Vorzeichens ± 1 übrig bleibt. Fasse ich eine unitäre Abbildung (4) auf nicht als Abbildung des Vektor-, sondern des Strahlenkörpers (homogener Standpunkt), so soll sie kurz eine Drehung heissen; $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ stellen dieselbe Drehung dar: $\mathfrak{E} \simeq \mathfrak{E}'$, wenn $\mathfrak{E}' = \varepsilon \mathfrak{E}$ ist. ε bedeutet dabei, wie im Folgenden stets, einen Zahlfaktor vom Betrage 1.

Eine Hermitesche Form ist eine Funktion des willkürlichen Vektors $\mathfrak{x} = (x_i)$ von der Gestalt [4]

(5) $$A(\mathfrak{x}) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i \bar{x}_k ,$$

deren Koeffizienten a_{ik} die Symmetriebedingung

(6) $$a_{ki} = \bar{a}_{ik} \quad \text{oder} \quad \bar{A}^* = A$$

erfüllen. Mit A bezeichne ich zugleich die Koeffizientenmatrix $\| a_{ik} \|$ in dem gerade benutzten Koordinatensystem. Wieder ist es zweckmässig, damit die zugehörige bilineare Bildung zu verknüpfen:

$$A(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{i,k} a_{ik} x_i \bar{y}_k .$$

Es ist zufolge der Symmetriebedingung

$$A(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}) = \overline{A(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})},$$

LL ge Schreibweise. ~~diese~~ und das ist ~~somit~~ ihre von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig. Insbesondere gilt $\overline{A(\mathfrak{x})} = A(\mathfrak{x})$, d.h. die Werte der Hermiteschen Form sind reell; ~~er~~ ihr Wert ändert sich nicht, wenn der Argumentvektor $\mathfrak{x}$ ersetzt wird durch $\varepsilon \mathfrak{x}$. Mit jeder Hermiteschen Form A ist in unitär invarianter Weise die Abbildung $\mathfrak{x}' = \mathfrak{x} A$ verknüpft, welche dieselbe Koeffizientenmatrix besitzt. Die invariante Natur der Verknüpfung geht daraus hervor, dass die Abbildung einem Vektor $\mathfrak{x}$ denjenigen $\mathfrak{x}'$ zuordnet, der identisch in $\mathfrak{y}$ die Gleichung erfüllt:

$$(\mathfrak{x}' \mathfrak{y}) = A(\mathfrak{x} \mathfrak{y}).$$

Die Grundtatsache für Hermitesche Formen ist der Satz von der Hauptachsentransformation: Ein normales Koordinatensystem $\mathfrak{e}_i$ kann zu A so gewählt werden, dass in ihm

(7) $$A(\mathfrak{x}) = a_1 x_1 \bar{x}_1 + a_2 x_2 \bar{x}_2 + \cdots + a_n x_n \bar{x}_n$$

wird. Die Eigenwerte $a_1, a_2, \cdots, a_n$ sind eindeutig durch die Hermitesche Form bestimmt (natürlich nur bis auf die Reihenfolge). Was die zugehörigen Hauptachsen oder Eigenvektoren $\mathfrak{e}_i$ betrifft, so steht es mit ihnen in Hinsicht der eindeutigen Bestimmtheit folgendermassen. Seien

---

[4] Formen und Matrizen werden stets mit grossen lateinischen Buchstaben bezeichnet.

etwa die Eigenwerte a_1, a_2, a_3 einander gleich, $= a$, und von den übrigen verschieden. Dann gehört zum Eigenwert a der von den Grundvektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ aufgespannte dreidimensionale Eigenraum $\mathfrak{R}(a)$, der aus allen Vektoren $\mathfrak{x}$ von der Gestalt $x_1 \mathfrak{e}_1 + x_2 \mathfrak{e}_2 + x_3 \mathfrak{e}_3$ besteht; in ihm ist $(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3)$ ein normales Koordinatensystem. Die zu den numerisch verschiedenen Eigenwerten $a', a'', \cdots$ gehörigen Teilräume $\mathfrak{R}(a'), \mathfrak{R}(a''), \cdots$, die gegenseitig aufeinander senkrecht stehen, sind durch A eindeutig determiniert; in jedem von ihnen kann aber das normale Koordinatensystem willkürlich gewählt werden. Das Letzte bedeutet in dem angenommenen Beispiel, dass x_1, x_2, x_3 untereinander noch einer beliebigen unitären Transformation unterworfen werden können, ohne dass die Normalform (7) zerstört wird.

Zwei Hermitesche Formen A, B lassen sich dann und nur dann simultan auf Hauptachsen transformieren, wenn die Koeffizientenmatrizes vertauschbar sind: $AB = BA$. Ein entsprechender Satz gilt für mehr als zwei Hermitesche Formen, ja für irgendeine endliche oder unendliche Gesamtheit solcher Formen.

§2. Der physikalische Begriff des reinen Falls.

Ich exemplifiziere am Beispiel des magnetischen Elektrons, weil hier sehr einfache, aber vom klassischen Standpunkt paradoxe Verhältnisse vorliegen. Nach der Annahme von Goudsmit und Uhlenbeck, die sich seither bestens bewährt hat, muss man dem Elektron ein eigenes Impulsmoment zuschreiben, dessen Komponente σ_x in einer beliebigen, etwa der x-Richtung nur der beiden Werte $+1$ und -1 fähig ist, wenn $\frac{h}{2\pi}$ als Einheit zugrunde gelegt wird. Man kann sich vorstellen, dass aus einem gegebenen Elektronenstrom, durch ein Verfahren analog dem bekannten Stern - Gerlach'schen Experiment zum Nachweis der Richtungsquantelung bei Atomen, der Schwarm derjenigen Elektronen ausgesondert wird, für welche σ_x den Wert $+1$ hat. Die Elektronen dieses Schwarms $\mathfrak{P}_x$ mögen keine Störung erfahren, sodass für jedes von ihnen dauernd mit Sicherheit σ_x den Wert $+1$ besitzt. In einem solchen Elektronenschwarm haben wir (wenn wir noch von Ort und Geschwindigkeit der Elektronen abstrahieren) einen "reinen Fall" vor uns: er ist von einer inneren Homogenität, die prinzipiell nicht mehr gesteigert werden kann. Denn alle physikalischen Fragen, welche sich sinnvoll mit Bezug auf ihn

NB: ϑ = klein griech. theta

NB: ⌴ bedeutet: nicht kursiv!

stellen lassen, finden eine von vorn herein angebbare numerisch bestimmte Antwort. Solche Fragen sind allein die folgenden: Ist r irgend eine Richtung, mit welcher Wahrscheinlichkeit hat für ein Elektron des $\mathfrak{S}_x$-Schwarms die Grösse σ_r den Wert $+1$ oder -1? Die numerisch bestimmte Antwort lautet : Wenn ϑ der Winkel ist, den die r-mit der x-Richtung bildet, so sind die beiden Wahrscheinlichkeiten bezw.

$$= \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \quad \text{und} \quad = \sin^2 \frac{\vartheta}{2}.$$

Die Wahrscheinlichkeit ist als Häufigkeit im Elektronenschwarm zu verstehen; sie würde sich, wenn mit dem Schwarm das Aussonderungsexperiment in der r-Richtung vorgenommen würde, in dem Stärkeverhältnis der beiden Teilstrahlen bekunden. Hätten wir am Anfang statt x eine andere, die x'-Richtung zugrunde gelegt, so hätten wir einen andern reinen Fall, den Elektronenschwarm $\mathfrak{S}_{x'}$ bekommen. In ihm hat σ_r mit der Wahrscheinlichkeit $\cos^2 \frac{\vartheta'}{2}$ den Wert $+1$, mit der Wahrscheinlichkeit $\sin^2 \frac{\vartheta'}{2}$ den Wert -1, wenn $\vartheta' = \sphericalangle(r, x')$ ist; insbesondere hat $\sigma_{x'}$ mit Sicherheit den Wert $+1$. Dieser reine Fall ist von dem ersten verschieden, weil die gleichen physikalischen Fragen hier andere numerische Antworten finden. Es gibt soviele verschiedene reine Fälle, als es verschiedene Richtungen x gibt. Wir können aus solchen reinen Strömen $\mathfrak{S}_x, \mathfrak{S}_{x'}, \dots$ Mischungen in irgend einem Verhältnis herstellen. Die Häufigkeit, mit welcher in einem solchen Mischstrom ein $\sigma_r = +1$ oder -1 ist, hängt von dem Mischungsverhältnis ab. Wir sind hier umgekehrt darauf angewiesen, aus den experimentell beobachteten Häufigkeiten Schlüsse auf die Konstitution des Mischstroms zu ziehen. Der Unterschied zwischen reinem Fall und Mischung, den ich hier aufstelle, ist analog zu den biologischen Begriffen der "reinen Linie" (innerhalb der reinen Linien gelten die Mendelschen Vererbungsgesetze) und der "Population" (auf welche sich die Gesetze von Galton bezogen). Hier wie dort ist es eine wichtige Aufgabe der Experimentierkunst, reine Linien zu isolieren. Die Unterscheidung: Theorie der reinen Fälle einerseits, Statistik der Gemenge anderseits, scheint mir fundamental für die richtige Erfassung des Sinnes der Quantenmechanik.

An dem Tatbestand, die Elektronenschwärme betreffend, wie er bisher beschrieben wurde, ist nichts Paradoxes. Statt vom Schwarm spreche ich in Zukunft vom einzelnen Elektron und demgemäss von Wahrscheinlichkeit statt von Häufigkeit. Etwas Paradoxes liegt erst in der ~~Aussage, dass~~

Aussage, dass σ_x die Komponente eines gewissen Vektors, des Impulsmomentes, inbezug auf die x- Richtung, ist. Denn dies involviert doch, wenn wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem xyz im Raum einführen und die willkürliche Richtung r die Richtungskosinusse a, b, c hat, die Gleichung

$$\sigma_r = a\sigma_x + b\sigma_y + c\sigma_z. \tag{8}$$

Wie verträgt sich das mit dem Umstand, dass σ_r so gut wie $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ nur der Werte ± 1 fähig ist? Aber in einem vorliegenden reinen Fall haben die hier auftretenden Grössen überhaupt keine mit Sicherheit angebbaren Werte, sodass zunächst der Sinn der Gleichung (8), wenn er in der üblichen Weise auf die Werte der physikalischen Grössen bezogen werden soll, ganz im Leeren hängt. Sie wird einen Inhalt erst gewinnen, wenn wir die physikalischen Grössen durch solche mathematische Entitäten darstellen, welche Multiplikation mit reellen Zahlen und Addition untereinander zulassen. - Und was soll es zweitens heissen, dass dieser Vektor mit den Komponenten $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ „Impulsmoment" ist? Damit wird offenbar ein bestimmtes Verhalten dieser Grössen gegenüber einem das Elektron einbettenden Magnetfeld (H_x, H_y, H_z) ausgesagt. Wenn wir uns das Elektron ganz naiv als ein rotierendes Kügelchen vorstellen, in welchem das Verhältnis von Ladungs- und Massendichte überall konstant ist, so ergibt sich in der Hamiltonschen Energiefunktion der Term

$$\mu(H_x\sigma_x + H_y\sigma_y + H_z\sigma_z), \tag{9}$$

dessen Faktor $\mu = \frac{eh}{4\pi mc}$ das Bohr'sche Magneton ist (e Ladung, m Masse des Elektrons, c Lichtgeschwindigkeit). Wieder ist es nötig, den Sinn eines Rechenausdrucks wie (9) zu verstehen, der die Addierbarkeit der Grössen σ voraussetzt; darüber hinaus muss aber erkannt werden, in welcher Weise die Hamiltonsche Energiefunktion das dynamische Geschehen bestimmt.

§3. Die physikalische Bedeutung der repräsentierenden Hermiteschen Form.

Der Kalkül der Hermiteschen Formen entspricht in rechnerischer Hinsicht allen Anforderungen, welche sich aus dem eben entwickelten Programm ergeben. Jede physikalische Grösse wird repräsentiert durch eine Hermitesche Form, alle physikalischen Grössen an demselben System durch Hermitesche Formen der gleichen Variablen x_i. Es ist der

schwierigere Teil der Physik, die Regeln ausfindig zu machen, nach denen man zu einer physikalischen Grösse die repräsentierende Form und ihre Matrix findet. Hier soll zunächst nur davon die Rede sein, was diese Matrix physikalisch bedeutet. Ich nehme dabei die Dimensionszahl n des Vektorraums, die Zahl der Variablen x_i endlich, obschon sie in den meisten Fällen unendlich gross ist. Alles Gesagte lässt sich aber analogisch auf den unendlichdimensionalen Vektorraum übertragen. Im oben besprochenen Beispiel des Elektrons ist, wie sich zeigen wird, $n = 2$.

Der einzelne reine Fall wird durch einen Vektor $\mathfrak{x}$ vom Betrage 1 in unserm n-dimensionalen Vektorraum gegeben, die einzelne physikalische Grösse α wird repräsentiert durch eine Hermitesche Form A in diesem Raum. ~~Durch~~ Mittels Einführung eines geeigneten normalen Koordinatensystems $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \cdots, \mathfrak{e}_n$ bringe man $A(\mathfrak{x})$ auf Hauptachsen:

$$(10) \quad A(\mathfrak{x}) = a_1 x_1 \bar{x}_1 + a_2 x_2 \bar{x}_2 + \cdots + a_n x_n \bar{x}_n \qquad (\mathfrak{x} = x_1 \mathfrak{e}_1 + x_2 \mathfrak{e}_2 + \cdots + x_n \mathfrak{e}_n).$$

Die Eigenwerte $a_1, a_2, \cdots, a_n$ bedeuten die Werte, deren die physikalische Grösse α überhaupt fähig ist; die Zahlen $|x_1|^2, |x_2|^2, \cdots, |x_n|^2$ bedeuten die Wahrscheinlichkeiten $W(\mathfrak{x})$, mit denen in dem reinen Fall $\mathfrak{x}$ diese Werte angenommen werden. Ihre Summe ist $= 1$, weil $\mathfrak{x}$ ein Vektor vom Betrage 1 ist. Der zweite Teil der Aussage erfordert noch eine gewisse Präzisierung für den Fall, dass mehrere Eigenwerte gleich sind. Sei etwa wieder $a_1 = a_2 = a_3 = a$ von den übrigen Eigenwerten verschieden; dann gehört zu dem Eigenwert a der dreidimensionale Eigenraum $\mathfrak{R}(a)$, der durch die Vektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ aufgespannt wird. Die Wahrscheinlichkeit, mit welcher die physikalische Grösse α in dem reinen Fall $\mathfrak{x}$ den Wert a annimmt, ist dann $= |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2$, d.i. gleich dem Quadrat des Betrages der senkrechten Projektion des Vektors $\mathfrak{x}$ auf den Eigenraum $\mathfrak{R}(a)$. Es ist wesentlich zu bemerken, dass mit den Eigenräumen auch die in ihnen liegenden Projektionen des gegebenen Vektors $\mathfrak{x}$ durch die Form A eindeutig bestimmt sind. - Gemäss den Wahrscheinlichkeiten, mit denen die Werte a_i angenommen werden, ist der Wert $A(\mathfrak{x})$ der Hermiteschen Form selber der Mittelwert der Grösse α im reinen Fall $\mathfrak{x}$.

Da alle Aussagen über den reinen Fall $\mathfrak{x}$ numerisch ungeändert bleiben, wenn $\mathfrak{x}$ durch $\varepsilon\mathfrak{x}$ ersetzt wird, darf zwischen ihnen nicht unterschieden werden. Dem reinen Fall entspricht also nicht eigentlich der Vektor, sondern der Strahl; wir haben nicht im Vektor-, son-

dern im Strahlkörper zu operieren. Dieser Umstand wird erst im zweiten Teil seine fundamentale Bedeutung enthüllen.

Rathm.

Es ist klar, dass man Hermitesche Formen addieren ~~kann~~ und dass man sie mit reellen Zahlen multiplizieren kann, ohne dadurch aus ihrem Bereich herauszutreten. Die kalkulatorischen Anforderungen, die, wie am Schluss von § 2 erhoben, sind erfüllt.

Wenn die Werte, deren die physikalische Grösse α fähig ist, sehr dicht liegen oder gar eine kontinuierliche Skala bilden, wird man nicht fragen nach der Wahrscheinlichkeit, mit welcher sie einen bestimmten Wert annimmt, sondern mit der sie in ein bestimmtes Wertintervall $a \leqq \alpha \leqq a'$ hineinfällt. ~~Sie ist gleich im Koordinatensystem der Hauptachsen gegeben durch~~ Nach unserer Anweisung haben wir dann im ~~die Summe erstreckt~~ Hauptachsensystem diejenigen Eigenvektoren $\mathfrak{e}_i$ aufzusuchen, deren zugehörige Eigenwerte a_i in jenes Intervall hineinfallen; sie spannen den Teilraum $\mathfrak{R}_a^{a'}$ auf. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist die auf diesen Teil der Indizes i sich erstreckende Summe

$$\sum_i x_i \bar{x}_i \qquad (a \leqq a_i \leqq a'), \tag{11}$$

der quadrierte Betrag der senkrechten Projektion des den reinen Fall darstellenden Vektors $\mathfrak{x}$ auf den Teilraum $\mathfrak{R}_a^{a'}$. Die Formen (11) sind es, welche Hr. v. Neumann a.a.O. als "Einzelformen" $\mathfrak{E}_a^{a'}$ einführte.

Liegen mehrere Grössen $\alpha, \beta, \dots$ vor, deren zugehörige Hermitesche Formen vertauschbare Koeffizientenmatrizes besitzen, so lassen sie sich alle simultan durch Einführung eines geeigneten normalen Koordinatensystems $\mathfrak{e}_i$ auf Hauptachsen transformieren. Die korrespondierenden Eigenwerte zu $\mathfrak{e}_i$ mögen $a_i, b_i, \dots$ heissen. $\mathfrak{x} = \mathfrak{e}_i$ stellt einen reinen Fall vor, in welchem jede der betrachteten Grössen mit Sicherheit einen bestimmten Wert hat, nämlich α den Wert a_i, β den Wert b_i, u.s.w. Die klassische Physik nimmt an, dass es sich für alle Grössen so verhält, und sie lässt nur die reinen Fälle $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \dots, \mathfrak{e}_n$, die besonders ausgezeichnet sind und in denen alle Grössen einen bestimmten Wert haben, als ~~solche~~ reine Fälle zu und fasst ~~alle~~ die andern bereits als Gemenge von ihnen auf. Sobald aber zwei physikalische Grössen auftreten, deren Matrizes nicht vertauschbar sind, entfällt diese Möglichkeit: in einem reinen Fall, in welchem die erste Grösse einen mit Sicherheit angebbaren Wert hat, bestehen für die Werte der zweiten Grösse nur Wahrscheinlichkeiten. Das ist in Einklang mit Heisenbergs Anschauungen,

wie er sie kürzlich in dieser Zeitschrift entwickelte (Bd. 43, 172, 1927).

Im Beispiel des Elektrons ist $n = 2$, weil jede Grösse nur zweier Werte fähig ist. Unter Verwendung eines bestimmten normalen Koordinatensystems $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$ lauten die den Grössen $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ entsprechenden Matrizen [5])

$$(12)\qquad S_x = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad S_y = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad S_z = \begin{Vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{Vmatrix},$$

oder als Hermitesche Formen geschrieben:

$$x_1\bar{x}_1 - x_2\bar{x}_2, \qquad x_1\bar{x}_2 + x_2\bar{x}_1, \qquad i(x_1\bar{x}_2 - x_2\bar{x}_1).$$

Jede von ihnen, ja auch das zu einer beliebigen andern Richtung r mit den Richtungskosinussen a, b, c $(a^2+b^2+c^2=1)$ gehörige

$$(13)\qquad S_r = aS_x + bS_y + cS_z = \begin{Vmatrix} a, & b+ic \\ b-ic, & -a \end{Vmatrix}$$

hat die Eigenwerte ± 1. Der reine Fall, bei welchem σ_x mit Sicherheit den Wert $+1$ hat, ist durch den Vektor $\mathfrak{e}_1$ gegeben. Im reinen Fall $\mathfrak{x} = (x_1, x_2)$ sind die Wahrscheinlichkeiten für $\sigma_x = \pm 1$ bezw. gleich $|x_1|^2, |x_2|^2$. Wir suchen eine Richtung r auf, deren zugehöriges σ_r in diesem Fall mit Sicherheit den Wert $+1$ hat, d.h. für welche der Vektor (x_1, x_2) in die zum Eigenwert $+1$ gehörige Hauptachse von S_r fällt:

$$a x_1 + (b+ic)x_2 = x_1,$$
$$(b-ic)x_1 - a x_2 = x_2.$$

Daraus ergibt sich

$$x_1 : x_2 = b+ic : 1-a = 1+a : b-ic.$$

a ist der Cosinus des Winkels ϑ zwischen der r- und der x-Richtung. Wir finden

$$|x_1|^2 : |x_2|^2 = b^2+c^2 : (1-a)^2 = 1-a^2 : (1-a)^2$$
$$= 1+a : 1-a = \cos^2\frac{\vartheta}{2} : \sin^2\frac{\vartheta}{2}.$$

§4. Statistik der Gemenge.

Liegt ein Gemenge vor, in welchem der reine Fall $\mathfrak{x}$ mit der relativen Stärke $v_{\mathfrak{x}}$ vertreten ist, $\sum v_{\mathfrak{x}} = 1$, so ermitteln sich die in ihm stattfindenden Wahrscheinlichkeiten W offenbar

---

[5]) W. Pauli jr., Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons Z. f. Phys. 43, 601, 1927. P. Jordan, l.c.[2]) (Z. f. Physik 44, S. 21 ff., 1927.)

durch Summation über die den einzelnen reinen Fällen ϱ zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $W(\varrho)$ in der Form

$$W = \sum_{\varrho} v_{\varrho} W(\varrho).$$

Darin liegt keinerlei neuer Ansatz. Wenn das Gemenge ein ganzes Kontinuum reiner Fälle enthält, verwandeln sich die Summen in Integrale.

Wenn wir nur wissen, welche reinen Fälle ϱ in einem Gemenge vertreten sind - sie werden ein gewisses Gebiet G des Strahlenkörpers ausfüllen -, werden wir der Statistik die Annahme zugrunde legen, dass innerhalb G alle ϱ gleichberechtigt sind. Diese Annahme ist möglich und hat einen klaren Sinn, weil der ϱ-Raum als metrischer Raum ein natürliches Volummass trägt. Solche Gemenge entstehen namentlich durch Störungen, z.B. durch die Wärmebewegung und die Zusammenstösse der Partikeln, auf welche sich die Wahrscheinlichkeitsfeststellungen beziehen. Zunächst ist bei Mittelung über den ganzen Strahlenkörper

$$\langle x_i \bar{x}_i \rangle = \frac{1}{n}, \qquad \langle x_i \bar{x}_k \rangle = 0 \quad (i \neq k).$$

Die Klammer $\langle\,\rangle$ bezeichnet den Mittelwert. Danach ist der Mittelwert der durch die Form (5) dargestellten Grösse α, wenn über die auftretenden reinen Fälle gar nichts bekannt ist,

$$= \frac{1}{n}(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}).$$

Die Summe der Glieder in der Hauptdiagonale, die Spur einer Hermiteschen Form, stellt sich übrigens dadurch als eine Invariante gegenüber unitären Transformationen heraus. Ein weiteres Problem dieser Art ist das folgende: α und β seien zwei bezw. durch A und B repräsentierte Grössen. Ich führe die beiden aus den Eigenvektoren e_i und e_i^* von A bezw. B bestehenden normalen Koordinatensysteme ein:

$$A(\varrho) = \sum_i a_i x_i \bar{x}_i, \quad B(\varrho) = \sum_i b_i x_i^* \bar{x}_i^* \qquad \left(\varrho = \sum x_i e_i = \sum x_i^* e_i^*\right),$$

und die unitäre Transformation, welche zwischen ihnen vermittelt:

$$x_k^* = \sum_i t_{ik} x_i.$$

Es sei bekannt, dass die Grösse α sicher in den Grenzen $a \leqq \alpha \leqq a'$ liegt; gefragt ist nach der Wahrscheinlichkeit W, mit welcher die Grösse β in den Grenzen $b \leqq \beta \leqq b'$ liegt. Von den Eigenwerten der Form A mögen etwa $a_1, a_2, \cdots, a_\varrho$ dem Intervall a, a' angehören, während $b_1, b_2, \cdots, b_\sigma$ die Eigenwerte der Form B sind, welche sich zwischen b und b' finden. Dadurch dass wir wissen, α liegt mit Sicherheit zwischen a und a', ist es ausgeschlossen, dass α einen von $a_1, a_2, \cdots, a_\varrho$ verschiedenen Eigenwert annimmt; die damit ver-

träglichen reinen Fälle sind diejenigen, für welche $x_{\varrho+1} = \cdots = x_n = 0$ ist, sie gehören dem von $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \cdots, \mathfrak{r}_\varrho$ aufgespannten Teilraum $\mathfrak{R}_a^{a'}$ an. Der ins Quadrat erhobene Betrag der senkrechten Projektion eines beliebigen Vektors $\mathfrak{x}$ auf diesen Teilraum ist gegeben durch die Einzelform

$$(14) \qquad E_a^{a'} = \sum_{i=1}^{\varrho} x_i \bar{x}_i = \sum_{i,k=1}^{n} e_{ik}\, x_i \bar{x}_k \,.$$

Die Wahrscheinlichkeit, mit der in einem reinen Fall $\mathfrak{x}$ die Grösse β einen der Werte $b_1, b_2, \cdots, b_\sigma$ annimmt, ist anderseits gegeben durch die Einzelform

$$F_b^{b'} = \sum_{i=1}^{\sigma} x_i^* \bar{x}_i^* = \sum_{i,k=1}^{n} f_{ik}\, x_i \bar{x}_k \,; \qquad f_{ik} = \sum_{s=1}^{\sigma} t_{is} \bar{t}_{ks} \,.$$

Nach unserer Anweisung hat man in $F_b^{b'}$ alle Variable x_i ausser den ersten ϱ gleich Null zu setzen und dann über den Teilraum $\mathfrak{R}_a^{a'}$ zu mitteln. Dabei ist

$$\langle x_i \bar{x}_k \rangle = \begin{cases} \frac{1}{\varrho} & (\text{für } i = k \leqq \varrho) \\ 0 & (\text{für alle andern Paare } i, k) \end{cases}$$

oder $\langle x_i \bar{x}_k \rangle = \frac{1}{\varrho} e_{ki} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$

So kommt

$$W = \frac{1}{\varrho} \sum_{r=1}^{\varrho} f_{rr} = \frac{1}{\varrho} \sum_{r=1}^{\varrho} \sum_{s=1}^{\sigma} |t_{rs}|^2 .$$

$$= \frac{1}{\varrho} \sum_{i,k=1}^{n} f_{ik}\, e_{ki}$$

Hält man das Intervall $a\,a'$ fest und will nur die relativen Wahrscheinlichkeiten miteinander vergleichen, die verschiedenen Intervallen $b\,b'$ entsprechen, so kann man den konstanten Faktor $\frac{1}{\varrho}$ weglassen. Die Summe rechts ist die Spur von $E_a^{a'} F_b^{b'}$. Weil ~~mit~~ einer Hermiteschen Form die Abbildung mit derselben Koeffizientenmatrix unitär-invariant assoziiert ist, hat neben der Spurbildung auch die Zusammensetzung der Matrizen von Hermiteschen Formen einen invarianten Sinn. Infolgedessen genügt es, die Einzelformen $E_a^{a'}$, $F_b^{b'}$ in irgend einem normalen Koordinatensystem zu kennen, um daraus die gesuchten relativen Wahrscheinlichkeiten vermittels der Formel

$$W = \mathrm{Spur}\left(E_a^{a'} \cdot F_b^{b'}\right)$$

zu finden. Diese Art von Fragen über Gemenge zieht v.Neumann a.a.O. allein in Betracht. Sein Schlussresultat ist mit unserm natürlich inhaltlich identisch, aber seine Formel ist komplizierter. In der ganzen Betrachtung kann α durch mehrere Grössen ersetzt werde, die simultan beobachtbar sind, deren Hermitesche Formen sich also simultan auf Hauptachsen bringen lassen, desgleichen β.

HS

Erst bei solchen Fragen über Gemenge spielt die Statistik eine Rolle, welche „relativ ist auf unsere Kenntnis und Unkenntnis," wie

Laplace sagt, oder auf Störungen, die man nicht im einzelnen verfolgen will, obwohl sie sich, wenigstens prinzipiell, verfolgen liessen. Die Wahrscheinlichkeit, von der in den reinen Fällen die Rede ist, hat hingegen eine völlig objektive Bedeutung, die nichts mit Störungen zu tun hat, und wird durch strenge Naturgesetze regiert.

II. Teil. Kinematik als Gruppe.

§ 5. Ueber Gruppen und ihre unitären Darstellungen.

Für die unitären Abbildungen gilt ein analoges Theorem wie das von der Hauptachsentransformation der Hermiteschen Formen: Zu einer gegebenen unitären Abbildung lässt sich ein solches normales Koordinatensystem x_i finden, in welchem die Abbildung durch die Gleichungen

$$x_k' = e_k x_k \tag{15}$$

wiedergegeben wird. Die Eigenwerte e_k sind Zahlen vom absoluten Betrag 1, ihre Phasen φ_k, $e_k = e^{i\varphi_k}$, heissen die Drehwinkel der unitären Abbildung. Analoge Bemerkungen wie für die Hauptachsentransformation der Hermiteschen Formen greifen Platz betreffs der Eindeutigkeit, mit welcher Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmt sind, sowie betreffs der simultanen Ueberführung mehrerer unitärer Abbildungen in die Normalform (15).

Aus einer Gruppe unitärer Abbildungen abstrahiert man das Gruppenschema, indem man die Abbildungen zu Elementen gleichgültiger Beschaffenheit degradiert und nur auf die Art ihrer Zusammensetzung achtet. Die abstrakte Gruppe ist also ein System von Elementen, innerhalb dessen durch "Komposition" aus zwei Elementen a, b in bestimmter Reihenfolge ein Element ab des Systems entspringt; in solcher Weise, dass

1) das assoziative Gesetz gilt: $(ab)c = a(bc)$;

2) ein "Einheitselement" 1 existiert, das die Gleichung $1s = s1$ $= 1$ für jedes Element s der Gruppe erfüllt; und dass

3) zu jedem Element a ein inverses a^{-1} vorhanden ist mit der Eigenschaft $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$.

Die Gruppe der unitären Abbildungen erscheint dann als eine Verwirklichung oder Darstellung der abstrakten Gruppe, welche dadurch zustande

B. V = grp. fat. U

kommt, dass jedem Gruppenelement s eine unitäre Abbildung $U(s)$ in solcher Weise zugeordnet ist, dass allgemein

(16) $$U(s)\,U(t) = U(st)$$

gilt (es folgt daraus sofort $U(1) = \underline{1}$). Da das Gruppenschema aus der Darstellung abstrahiert wurde, ist die Darstellung getreu, d.h. verschiedene Elementen entsprechen verschiedene Abbildungen U , oder, was dasselbe besagt, $U(s)$ ist $= \underline{1}$ nur für $s = 1$. Die Gruppe der unitären Abbildungen ist reduzibel, wenn in dem Vektorraum $\mathfrak{R}_n$, in welchem sich die unitären Abbildungen abspielen, ein linearer Unterraum $\mathfrak{R}_m$ existiert mit einer Dimensionzahl $m > 0$, aber $< n$, der gegenüber allen $U(s)$ invariant ist. Die Vektoren, welche zu allen in $\mathfrak{R}_m$ gelegenen senkrecht sind, bilden einen linearen Unterraum $\mathfrak{R}_{n-m}$; und es ist $\mathfrak{R}_n = \mathfrak{R}_m + \mathfrak{R}_{n-m}$ in dem Sinne, dass sich jeder Vektor auf eine und nur eine Weise in zwei Komponenten spalten lässt, von denen die erste $\mathfrak{R}_m$, die zweite $\mathfrak{R}_{n-m}$ angehört. Weil die $U(s)$ unitäre Transformationen sind, lassen sie ausser $\mathfrak{R}_m$ auch $\mathfrak{R}_{n-m}$ invariant: die Darstellung zerfällt in eine m-dimensionale und eine $(n-m)$-dimensionale. Wählt man das normale Koordinatensystem x_i so, dass die ersten m Grundvektoren den Raum $\mathfrak{R}_m$ aufspannen, die letzten $n-m$ aber den Raum $\mathfrak{R}_{n-m}$, so kommt dieser Zerfall an den Koeffizientenmatrizen $U(s)$ unmittelbar zum Ausdruck. Man kann sich danach auf die Aufsuchung der irreduziblen Darstellungen beschränken. Für irreduzible Darstellungen gilt der wichtige Satz: Ist die unitäre Matrix A mit allen $U(s)$ vertauschbar: $A\,U(s) = U(s)\,A$, so ist $A = \varepsilon \underline{1}$ Multiplum der Einheitsmatrix $\underline{1}$.(Es ist dabei sogar unwesentlich, dass die $U(s)$ eine Gruppe bilden.)

Wir denken in erster Linie an endliche Gruppen. Zu jeder Gruppe gehört eine bestimmte "Grössenalgebra". Eine Grösse im Gruppengebiet wird dadurch gegeben, dass jedem Gruppenelement s eine Zahl $\xi(s)$ zugeordnet wird. Die Grössen haben demnach soviele Zahlkomponenten, als es Gruppenelemente gibt, sie sind sozusagen die Vektoren im Gruppenraum, in dem jedes Element eine Dimension, einen Grundvektor bedeutet.[6] Die Grösse ξ mit den Komponenten $\xi(s)$, die danach symbo-

---

[6] Den in der mathematischen Literatur gebräuchlichen Namen Gruppenzahl vermeide ich, weil ich das Wort "Zahl" für die gewöhnlichen Zahlen reservieren möchte.

lisch mit $\sum \xi(s)\cdot s$ bezeichnet werden mag, erscheint in der Verwirklichung der Elemente s durch die unitären Abbildungen $U(s)$ als die Matrix

(17) $$X = \sum_s \xi(s)\, U(s).$$

N3 · gross X gross Y gross Z

Bildet man das Produkt zweier solcher Matrizen X, Y, welche zu den Grössen ξ und η gehören, so entsteht wiederum eine Matrix Z, die zu einer bestimmten, durch ξ und η determinierten Grösse ζ gehört. Denn es ist

$$Z = XY = \sum_{t,t'} U(t)\,U(t')\,\xi(t)\,\eta(t') = \sum_{t,t'} U(tt')\,\xi(t)\,\eta(t') = \sum_s U(s)\,\zeta(s),$$

(18) $$\zeta(s) = \sum_{tt'=s} \xi(t)\,\eta(t').$$

Die Summe in (18) erstreckt sich über alle Paare von Elementen t, t', deren Kompositum $tt' = s$ ist. Man kann sie als einfache Summe über alle Gruppenelemente t, aber weniger symmetrisch auch so schreiben:

$$\zeta(s) = \sum_t \xi(st^{-1})\,\eta(t) = \sum_t \xi(t)\,\eta(t^{-1}s).$$

(18) ist also das Multiplikationsgesetz der Grössen im Gruppengebiet. Die Grössen können danach, in genauer Anschmiegung an die zugehörigen Matrizen, addiert werden, mit Zahlen multipliziert und untereinander multipliziert werden; in solcher Weise, dass die wichtigsten algebraischen Axiome erfüllt bleiben. (Nur das kommutative Gesetz der Multiplikation und das Axiom, welches Nullteiler ausschliesst, gelten nicht.)

Die Grösse ξ heisst reell, wenn ihre Komponenten der Gleichung

(19) $$\xi(s^{-1}) = \bar{\xi}(s)$$

genügen. Die zugehörige Matrix X ist dann Hermitesch. Denn aus

$$U(s)\,U(s^{-1}) = 1 \quad \text{zusammen mit} \quad \bar{U}^*(s)\,U(s) = 1$$

folgt $\bar{U}^*(s) = U(s^{-1})$. Darum gilt, unter der Voraussetzung (19),

$$\bar{X}^* = \sum_s \bar{\xi}(s)\,\bar{U}^*(s) = \sum_s \xi(s^{-1})\,U(s^{-1}) = \sum_s \xi(s)\,U(s) = X.$$

Den Bereich der reellen Grössen verlässt man nicht durch Addition, Multiplikation der Grössen untereinander und durch ihre Multiplikation mit reellen Zahlen.[7]

Für uns kommen vorzugsweise die Abelschen Gruppen in Betracht, bei welchen die Komposition der Elemente kommutativ ist: $st = ts$. Eine endliche Abelsche Gruppe besitzt eine Basis $a_1, a_2, \dots, a_f$.

---

[7] Von der natürlichen und wichtigen Rolle, welche diese Begriffe in der Darstellungstheorie spielen, die sich nachher auch als die grundlegenden in der Quantenmechanik herausstellen werden, kann man nur einen Eindruck gewinnen durch das Studium dieser Theorie. Es sei insbesondere verwiesen auf: F.Peter und H.Weyl, Math. Annalen, 97, 737, 1927.

19

Das sind f Elemente der Gruppe mit folgenden Eigenschaften: Bedeuten $h_1, h_2, \ldots, h_f$ ihre Ordnungen, so erhält man alle Gruppenelemente in der Form

$$s = a_1^{z_1} a_2^{z_2} \cdots a_f^{z_f}, \tag{20}$$

wenn z_i ein volles Restsystem mod. h_i, z.B. die Zahlen $1, 2, \ldots, h_i$ durchläuft. (Ordnung h eines Elementes a ist der niederste Exponent, für welchen a^h gleich dem Einheitselement 1 ist.) Die Auswahl der Basiselemente kann so normiert werden, dass h_2 ein Teiler von h_1, h_3 ein Teiler von $h_2, \ldots,$ h_f ein Teiler von h_{f-1} ist. Unter diesen Umständen ist die Zahl der Basiselemente und die Teilerreihe $(h_1, h_2, \ldots, h_f)$ ihrer Ordnungen eindeutig durch die Gruppe bestimmt. Jene Teilerreihe charakterisiert umgekehrt vollständig die Struktur der Gruppe.

Die Aufsuchung der irreduziblen Darstellungen einer Abelschen Gruppe ist sehr einfach. Da nämlich die unitären Matrizen $U(s)$ in diesem Falle vertauschbar sind, kann man sie nach einem oben erwähnten Satz alle gleichzeitig "auf Hauptachsen bringen"; die Darstellung zerfällt also in lauter eindimensionale, es gibt nur eindimensionale irreduzible Darstellungen:

$$x' = \varepsilon(s) \cdot x.$$

Dabei ist die Abhängigkeit der Zahl $\varepsilon(s)$ vom Gruppenelement s so zu beschreiben: Dem Basiselement a_i korrespondiert eine h_i-te Einheitswurzel ε_i, und es ist für (20):

$$\varepsilon(s) = \varepsilon_1^{z_1} \varepsilon_2^{z_2} \cdots \varepsilon_f^{z_f}$$

(Charaktere einer Abelschen Gruppe).

Aber das Darstellungsproblem stellt sich für uns in etwas anderer Gestalt, als es bislang besprochen wurde. Denn in der Quantenmechanik haben nicht die Vektoren eine Bedeutung, sondern lediglich die Strahlen: sie kennzeichnen die verschiedenen reinen Fälle. Wir gehen also zu dem homogenen Standpunkt über, für welchen die unitäre Matrix U nicht eine Abbildung des Vektor-, sondern des Strahlenkörpers bedeutet und demgemäss mit der Abbildung εU zusammenfällt. So soll das Wort Darstellung in Zukunft verstanden werden: als getreue Darstellung durch Drehungen des Strahlenkörpers.[8] Die charakteristische Forderung

---

[8] Tiefgehende Untersuchungen über das Darstellungsproblem in diesem Sinne hat I. Schur angestellt: Crelles Journ. 127, 20, 1904, und 132, 85, 1907.

lautet nunmehr:

(21) $$U(s)\,U(t) \simeq U(st).$$

Wir können den willkürlichen Faktor ε in jedem $U(s)$ nach Gutdünken fixieren ("Eichung"). Als Gleichung wird dann (21) so zu lesen sein:

$$U(s)\,U(t) = \delta(s,t)\,U(st),$$

wo δ eine von s und t abhängige Zahl vom absoluten Betrag 1 ist. Die Angabe einer Grösse ξ im Gruppengebiet ist relativ auf die benutzte Eichung; wird die Eichung gemäss der Formel $U(s) \to \varepsilon(s)\,U(s)$ verändert, so müssen die Komponenten $\xi(s)$ jeder Grösse ξ ersetzt werden durch $\varepsilon^{-1}(s)\,\xi(s)$. Das Multiplikationsgesetz lautet

$$\zeta(s) = \sum_{tt'=s} \delta(t,t')\,\xi(t)\,\eta(t').$$

Die Beschreibung (19) der reellen Grössen ξ ist nur dann zutreffend, wenn die Eichung so eingerichtet wurde, dass $U(s^{-1}) = U^{-1}(s)$ ist. Für eine irreduzible Darstellung gilt nach wie vor der Satz: Ist die feste Drehung A mit allen $U(s)$ vertauschbar, $A^{-1}U(s)A = U(s)$, so ist $A \simeq 1$.

Die eindimensionalen Darstellungen verlieren jetzt jedes Interesse; denn die einzige eindimensionale Drehung ist die Identität. Aber im gegenwärtigen Sinne gibt es auch für Abelsche Gruppen mehrdimensionale irreduzible Darstellungen. Nicht freilich, wenn die Abelsche Gruppe zyklisch ist, aus den Wiederholungen eines einzigen Elementes a besteht:

$$1,\ a,\ a^2,\ \ldots,\ a^{h-1} \quad (a^h = 1).$$

Denn ist A die a korrespondierende Matrix in der Darstellung, so ist $A^h = \varepsilon 1$. Indem man A durch den Zahlfaktor $\sqrt[h]{\varepsilon}$ dividiert, erreicht man eine solche Eichung des A, dass $A^h = 1$ wird. Dann bilden aber die Potenzen von A eine Darstellung der zyklischen Gruppe im alten inhomogenen Sinne. Wir illustrieren daher das Gesagte durch die einfachste nicht-zyklische Abelsche Gruppe. Das ist die Vierergruppe. Sie besteht aus vier Elementen $1, a, b, c$, und ist beschrieben durch die Kompositionsregel

$$a^2 = b^2 = c^2 = 1,$$
$$bc = cb = a, \quad ca = ac = b, \quad ab = ba = c.$$

Eine irreduzible mit ihr isomorphe Drehungsgruppe ist die folgende 1):

(22) $$U(1) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},\ U(a) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix},\ U(b) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix},\ U(c) = \begin{Vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{Vmatrix}.$$

Die Eichung ist so gewählt, dass $V^2(a)$ oder $V(a)\,V(a^{-1}) = \underline{1}$ ist und Entsprechendes für die übrigen Elemente gilt. Die „reellen Grössen"

$$\rho 1 + \xi a + \eta b + \zeta c \tag{23}$$

sind also jene, deren Komponenten ρ, ξ, η, ζ reelle Zahlen sind. Ihre Algebra ist die einfachste nicht-kommutative, welche existiert: die der Quaternionen (genauer derjenigen Quaternionen, von denen die skalare Komponente reell ist, die drei vektoriellen rein imaginär). In der Darstellung $\underline{\mathfrak{V}}$ erscheint die Grösse (23) als die Matrix

$$X = \begin{Vmatrix} \rho + \xi, & \eta + i\zeta \\ \eta - i\zeta, & \rho - \xi \end{Vmatrix}.$$

Die Irreduzibilität geht ohne weiteres daraus hervor, dass zwischen den vier Koeffizienten dieser Matrix, wenn ρ, ξ, η, ζ als Variable betrachtet werden, keine homogene lineare Relation mit konstanten Zahlkoeffizienten besteht. Wir kennen dieses Beispiel schon vom magnetischen Elektron her. Allgemein werden wir erkennen, dass eine irreduzible Abelsche Drehungsgruppe im Strahlenkörper der reinen Fälle der Kinematik eines physikalischen Systems zugrunde liegt; die reellen Grössen in diesem Gruppengebiet sind die physikalischen Grössen des Systems.

Innerhalb einer Abelschen Drehungsgruppe gilt für die (irgendwie geeichten) Matrizen zweier Drehungen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ eine Gleichung

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \varepsilon \mathcal{B}\mathcal{A}. \tag{24}$$

Wir haben uns zu überlegen, in welcher Weise sie erfüllt sein kann. Bildet man auf beiden Seiten die Determinante, so ergibt sich $\varepsilon^n = 1$, ε ist also eine n^{te} Einheitswurzel. Ferner erhält man durch Induktion für $k = 1, 2, 3, \dots$:

$$\mathcal{A}^k \mathcal{B} = \varepsilon^k \mathcal{B}\mathcal{A}^k, \quad \text{ebenso} \quad \mathcal{A}\mathcal{B}^l = \varepsilon^l \mathcal{B}^l \mathcal{A}. \tag{25}$$

Kombiniert man beide Gleichungen, indem man die zweite auf $\mathcal{A}^k$ und $\mathcal{B}$ statt auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ anwendet, so erhält man die allgemeinere Regel

$$\mathcal{A}^k \mathcal{B}^l = \varepsilon^{kl} \mathcal{B}^l \mathcal{A}^k. \tag{26}$$

Weiter notieren wir die Gleichung

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})^k = \varepsilon^{\frac{k(k+1)}{2}} \cdot \mathcal{B}^k \mathcal{A}^k. \tag{27}$$

Sie folgt sogleich durch Schluss von k auf $k+1$, indem man die erste Formel (25) heranzieht. Setzen wir in (25) insbesondere $k = n$, so kommt $\mathcal{A}^n \mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}^n$. Wenn die Abelsche Drehungsgruppe irreduzibel ist, erschliesst man aus dieser Vertauschbarkeit von $\mathcal{A}^n$ mit allen

Gruppenelementen $\mathfrak{B}$: $A^n \simeq \underline{1}$. Die Ordnungen aller Elemente einer irreduziblen Abelschen Drehungsgruppe in n Dimensionen sind demnach Teiler von n.

Liegt eine endliche Abelsche Gruppe in abstracto vor, (20), so wird man zur Aufsuchung ihrer getreuen irreduziblen n-dimensionalen Darstellungen folgendermassen verfahren. Für jedes Basiselement, z.B. $a_1 = a$ von der Ordnung $h_1 = h$, eicht man $U(a) = A$ in solcher Weise, dass $A^h = \underline{1}$ ist. Nachdem dies geschehen, eiche man $U(s)$ für das Element (20) durch die Festsetzung

$$U(s) = A_1^{z_1} A_2^{z_2} \cdots A_f^{z_f}.$$

Es kommt nun wesentlich auf die Bestimmung der Kommutatorzahlen ε_{ik} in den Gleichungen

$$(28) \qquad A_i A_k = \varepsilon_{ik} A_k A_i \qquad (i > k;\ i, k = 1, 2, \dots, f)$$

an. Da aus (28)

$$A_i^{h_i} A_k = \varepsilon_{ik}^{h_i} A_k A_i^{h_i}, \quad \text{d.i.} \quad A_k = \varepsilon_{ik}^{h_i} A_k$$

folgt, muss ε_{ik} eine h_i^{te} Einheitswurzel sein, ~~ebenso eine h_k^{te}, also schliesslich eine h_{ik}^{te}, wenn h_{ik} den grössten gemeinsamen Teiler von h_i und h_k bedeutet,~~

H 8

§ 6. Uebertragung auf kontinuierliche Gruppen.

Eine infinitesimale unitäre Abbildung ist eine solche, welche unendlich wenig von der Identität abweicht, durch die also alle Vektoren $\mathfrak{x} = (x_i)$ nur unendlich kleine Aenderungen $d\mathfrak{x} = (dx_i)$ erfahren. Der analoge Begriff für reelle orthogonale Abbildungen des dreidimensionalen Raums ist aus der Kinematik des starren Körpers geläufig: bei der kontinuierlichen Drehung eines Kreisels wird von Schritt zu Schritt eine infinitesimale Drehung vollzogen. Ein anderes einfaches Beispiel ist der Prozess der kontinuierlichen Verzinsung zu festem Zinssatz, der eine Grösse x in jedem Zeitelement dt mit dem Faktor $1 + c\,dt$ multipliziert, ihr also den Zuwachs $dx = cx\,dt$ erteilt. Der Erfolg wird sein, dass sie im Zeitraum t von x auf $e^{ct} \cdot x$ angewachsen ist. Um die unendlich kleinen Grössen zu vermeiden, ist es auch hier zweckmässig, eine (rein fiktive) Zeit τ einzuführen und daher die infinitesimale unitäre Abbildung in der Form zu schreiben

$$(29) \qquad \frac{d\mathfrak{x}}{d\tau} = \mathfrak{x}\mathfrak{C} \quad , \qquad \frac{dx_k}{d\tau} = \sum_i c_{ik} x_i .$$

NB: Unterscheide klein c und groß C

Die Forderung, dass $\sum x_i \bar{x}_i$ invariant bleiben soll, drückt sich in der

Gleichung aus

$$\sum_k \left(x_k \frac{d\bar{x}_k}{d\tau} + \bar{x}_k \frac{dx_k}{d\tau} \right) = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_{i,k} (c_{ik} + \bar{c}_{ki})\, x_i \bar{x}_k = 0.$$

Die Hermitesche Form auf der linken Seite kann aber nur dann identisch in den x_i verschwinden, wenn alle ihre Koeffizienten 0 sind. So ergeben sich die Bedingungen der schiefen Symmetrie

$$\bar{c}_{ki} = -c_{ik}, \quad \bar{C}^* = -C.$$

Setzt man $C = iA$, so ist A eine Hermitesche Matrix. Resultat: Mit jeder Hermiteschen Form A ist in unitär-invarianter Weise (vergl. S. —) die infinitesimale unitäre Abbildung

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = i\varphi A$$

verbunden. Der Satz von der Hauptachsentransformation der Hermiteschen Formen stellt sich dadurch als der infinitesimale Grenzfall des entsprechenden Theorems für unitäre Abbildungen heraus. Diejenigen infinitesimalen Abbildungen, welche alle Strahlen ungeändert lassen, haben die Form

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = ic\varphi,$$

mit einem reellen Zahlfaktor c. Der homogene Standpunkt verlangt also hier, dass A nicht von $A + c\underline{1}$ unterschieden wird.

Indem man in jedem Zeitelement $d\tau$ die gleiche infinitesimale unitäre Abbildung (29) wiederholt, erhält man durch Integration von (29)

$$\varphi(\tau) = \varphi\, U(\tau).$$

$U(\tau)$ ist die endliche Drehung, welche im Zeitraum τ vor sich geht. Es ist natürlich

$$U(\tau + \tau') = U(\tau)\, U(\tau').$$

Die $U(\tau)$ bilden also eine einparametrige kontinuierliche Gruppe; gegenüber der Zusammensetzung verhält sich der Zeitparameter τ additiv. Vergl. den oben geschilderten Prozess der kontinuierlichen Verzinsung! Die Integration von (29) kann in der gleichen Weise vorgenommen werden, wie in diesem einfachsten Fall. Unter Benutzung einer gegen ∞ strebenden ganzen Zahl m zerlegt man die Zeit τ in Elemente $\frac{\tau}{m}$. In jedem der m Zeitelemente erfährt φ die Transformation $\underline{1} + \frac{\tau}{m} C$; daher ist

$$U(\tau) = \lim_{m=\infty} \left(\underline{1} + \frac{\tau C}{m} \right)^m = e^{\tau C}.$$

Die Konvergenz kann ebenso leicht bewiesen werden wie im eindimensionalen Fall, wenn C eine Zahl ist. Auch ergibt sich die Potenzreihe

(30) $$U(\tau) = \underline{1} + \frac{\tau}{1!} C + \frac{\tau^2}{2!} C^2 + \dots .$$

Eine andere Methode ist die sukzessive Approximation; sie setzt nicht voraus, dass $\mathcal{C}$ von τ unabhängig ist. Als 0^{te} Approximation wird das für $\tau = 0$ vorgegebene φ genommen, allgemein wird die l^{te} aus der $(l-1)^{ten}$ Annäherung mittels der Gleichung

$$\frac{d\varphi_l}{d\tau} = \varphi_{l-1}\,\mathcal{C} \qquad \text{zu} \qquad \varphi_l(\tau) = \varphi + \int_0^\tau \varphi_{l-1}(\tau)\,\mathcal{C}\,d\tau$$

bestimmt. Die Annäherungen $\varphi_l(\tau)$ konvergieren mit $l \to \infty$ gegen die gesuchte Grenze $\varphi(\tau)$. Es ergibt sich für $\varphi(\tau)$ eine unendliche Reihe:

$$(31) \qquad \sum_{l=0}^{\infty} \int\int \cdots \int_{(0 \leqq \tau_1 \leqq \tau_2 \leqq \cdots \leqq \tau_l \leqq \tau)} \mathcal{C}(\tau_1)\,\mathcal{C}(\tau_2) \cdots \mathcal{C}(\tau_l)\, d\tau_1\, d\tau_2 \cdots d\tau_l .$$

Bei zeitunabhängigem $\mathcal{C}$ kommt wieder die Gleichung (30) heraus.

Eine Zwischenbemerkung:

Es wurde erwähnt, dass in der Physik meist Formen mit unendlich vielen Variablen eine Rolle spielen. Die Theorie der Hermiteschen Formen von unendlich vielen Veränderlichen unter dem Einfluss unitärer Transformationen wurde von Hilbert und Hellinger entwickelt, unter der Voraussetzung, dass die Form beschränkt ist, d.h. dass eine Konstante M existiert, ~~sodass ihre~~ unter der die Werte [der Form ihren absoluten Beträgen nach] für alle Vektoren vom Betrage 1 ~~absolut ≤ M~~ bleiben.[9] Die in der Physik vorkommenden Formen genügen dieser Bedingung nicht. Eine Erweiterung der Theorie,

[9] D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen, Leipzig 1912, insbesondere IV. Abschnitt. E. Hellinger, Crelles Journal 136, 1, 1910.

(N.B. Fußnote)

welche ~~ihren~~ den physikalischen Anforderungen genügt, hat v.Neumann a.a.O. in Aussicht gestellt. Es ergibt sich hier die Aufgabe, das Analoge für die unitären Abbildungen zu leisten. Für sie wird die Theorie wesentlich befriedigender ausfallen, weil keinerlei spezielle die Konvergenz garantierende Voraussetzungen zu machen sind, wie es die Hilbertsche Annahme der Beschränktheit war. Denn der Begriff der unitären Abbildung bringt es mit sich, dass in der Matrix die Quadratsumme der absoluten Beträge jeder Zeile und jeder Spalte konvergiert, nämlich = 1 ist. (Die mathematische Durchführung soll an anderer Stelle gegeben werden.) Der integrale Standpunkt ist in begrifflicher Hinsicht dem infinitesimalen immer überlegen, er lässt zugleich die natürlichen Grenzen der differentiellen Begriffsbildungen erkennen. In diesem Sinne ist es zweckmässig, da mit einer Grösse α ja immer auch ihre reellen konstanten Multipla $k\alpha$ als physikalische

Grössen auftreten, diese zu ersetzen durch e^{ika}, die Hermiteschen Matrizen kA durch die unitären e^{ikA}. Mit A erscheinen sie zugleich auf Hauptachsen transformiert, wobei anstelle der ~~Eigenwerte~~ a_μ die Zahlen e^{ika_μ} als Eigenwerte sich ergeben.

Doch nun zu den unendlichen Gruppen! Eine unendliche Gruppe kann diskontinuierlichen Charakter haben, wie die in der Lehre von der Kristallstruktur auftretende Gruppe der Gittertranslationen des Raumes, deren Komponenten inbezug auf die drei Achsen x, y, z ganze Zahlen sind. Es können auch gemischte kontinuierlich-diskrete Gruppen vorkommen, wie die Gruppe aller Raumtranslationen, deren x-Komponente ganzzahlig ist. Doch haben wir jetzt insbesondere die kontinuierlichen Gruppen im Auge. Eine solche denkt man sich nach S.Lie erzeugt durch ihre infinitesimalen Elemente. Ist die Gruppe eine f-parametrige kontinuierliche Mannigfaltigkeit $\mathfrak{G}$, so sind die infinitesimalen Elemente die Stellen auf der Gruppenmannigfaltigkeit, welche der Einheitsstelle 1 unendlich benachbart sind, oder die von 1 ausgehenden Linienelemente. Sie bilden also eine f-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit. Halten wir uns sogleich an die Darstellung, an die konkreten unitären Abbildungen statt an die abstrakten Elemente, so haben wir mithin eine f-dimensionale lineare Schar unitärer Matrizen vor uns:

NB: $\mathfrak{G}$ = groß deutsch $\mathfrak{G}$

NB: $\mathfrak{g}$ = klein deutsch $\mathfrak{g}$

$$(32) \qquad \mathfrak{g}: \quad \mathfrak{C}_1 d\sigma_1 + \mathfrak{C}_2 d\sigma_2 + \cdots + \mathfrak{C}_f d\sigma_f,$$

innerhalb deren $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots, \mathfrak{C}_f$ eine willkürlich gewählte Basis ist und die Zahlparameter $d\sigma_1, d\sigma_2, \cdots, d\sigma_f$ aller reellen Werte fähig sind. Setzt man in (32) $d\sigma_i = \alpha_i d\tau$ und iteriert diese infinitesimale Abbildung, die man sich im Zeitelement $d\tau$ vollzogen denkt, so gelangt man nach Ablauf der Zeit τ, wenn anstelle von $\alpha_i \tau$ jetzt wieder σ_i geschrieben wird, zu

$$(33) \qquad U(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_f) = e^{\sigma_1 \mathfrak{C}_1 + \sigma_2 \mathfrak{C}_2 + \cdots + \sigma_f \mathfrak{C}_f}.$$

Innerhalb der infinitesimalen Gruppe $\mathfrak{g}$ gibt sich die Komposition an den Parametern $d\sigma$ als Addition kund. Es könnte darum so scheinen, dass jede lineare Schar (32) eine f-parametrige kontinuierliche Gruppe nach der Formel (33) erzeugt. Das ist aber nicht der Fall, wie die folgende Betrachtung lehrt, die nach dem Muster bekannter Integrabilitätsüberlegungen verläuft. Sie nutzt für die infinitesimalen Elemente die Tatsache aus, dass mit zwei Abbildungen U, V auch der Kommuta-

tor $U V U^{-1} V^{-1}$ in der Gruppe enthalten sein muss. Sind also $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'$ zwei in der Schar $\mathfrak{g}$ vorkommende Matrizen, so gehören die infinitesimalen Abbildungen

$$d\mathfrak{x} = \mathfrak{x}\,\mathfrak{C}\,d\tau \quad \text{und} \quad d'\mathfrak{x} = \mathfrak{x}\,\mathfrak{C}'\,d\tau'$$

zur Gruppe. Führt man sie beide hintereinander aus, das eine Mal in der Reihenfolge d, d', das andere Mal in der Reihenfolge d', d, so ist die Differenz der dadurch aus $\mathfrak{x}$ entstehenden Vektoren

$$\Delta\mathfrak{x} = d\,d'\mathfrak{x} - d'd\,\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\mathfrak{C}\mathfrak{C}' - \mathfrak{C}'\mathfrak{C})\,d\tau\,d\tau'.$$

Diese infinitesimale Abbildung ist der gesuchte Kommutator. Infolgedessen muss mit $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ auch immer $\mathfrak{C}\mathfrak{C}' - \mathfrak{C}'\mathfrak{C}$ der Schar $\mathfrak{g}$ angehören. An der Basis formuliert, heisst das, dass die Matrizen $\mathfrak{C}_i\mathfrak{C}_k - \mathfrak{C}_k\mathfrak{C}_i$ sich linear mittels reeller Zahlkoeffizienten aus $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_f$ kombinieren müssen. Diese von Lie aufgestellte Bedingung, deren Herleitung leicht streng zu machen ist, ist nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend.[10]

Die Gruppe ist Abelsch, wenn der Kommutator irgend zweier Elemente gleich 1 ist. In diesem Falle müssen die Matrizen $\mathfrak{C}_i$ den Gleichungen

14 (35) $$\mathfrak{C}_i\mathfrak{C}_k - \mathfrak{C}_k\mathfrak{C}_i = 0$$

genügen, d.h. sie müssen vertauschbar sein. Für zwei vertauschbare Matrizen A und B gilt

$$e^{A+B} = e^{A} \cdot e^{B};$$

14 das ergibt sich genau wie für Zahlen. Die Gleichungen (35), d.i. die Vertauschbarkeit der infinitesimalen Elemente genügt also, wie das eigentlich selbstverständlich ist, um den Abelschen Charakter der ganzen Gruppe sicherzustellen, es gilt auf Grund von (34)

$$U(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_f)\,U(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_f) = U(\sigma_1+\tau_1, \sigma_2+\tau_2, \dots, \sigma_f+\tau_f).$$

Jede f-parametrige Abelsche Gruppe ist danach isomorph mit der Gruppe der Translationen in einem f-dimensionalen Raum. Die $\mathfrak{C}_i$ spielen eine analoge Rolle wie die Basis bei den endlichen Abelschen Gruppen.

Wir werden es zwar mit einer Abelschen Gruppe zu tun haben, aber die Abbildungen sind als solche des Strahlenkörpers zu verstehen.

---

[10] Genaueres ist etwa nachzulesen bei: H.Weyl, Mathematische Analyse des Raumproblems, Berlin 1923, S. 33 bis 36, und die dazu gehörigen Anhänge.

Ueberall ist das Zeichen = zwischen unitären Abbildungen durch $\simeq$ zu

14 ersetzen. Anstelle der Bedingungen (37) treten danach solche von der Form

$$\mathfrak{b}_\mu \mathfrak{b}_\nu - \mathfrak{b}_\nu \mathfrak{b}_\mu = i c_{\mu\nu} \mathbf{1}.$$

$c_{\mu\nu}$ ist ein schiefsymmetrisches System reeller Zahlen. Der Kommutator der infinitesimalen Abbildungen mit den Matrizen

$$A = \sigma_1 \mathfrak{b}_1 + \cdots + \sigma_f \mathfrak{b}_f \quad \text{und} \quad B = \tau_1 \mathfrak{b}_1 + \cdots + \tau_f \mathfrak{b}_f$$

ist

$$AB - BA = i \sum_{\mu,\nu} c_{\mu\nu} \sigma_\mu \tau_\nu \cdot \mathbf{1}.$$

Die schiefsymmetrische Form

$$\sum_{\mu,\nu} c_{\mu\nu} \sigma_\mu \tau_\nu = L(\sigma, \tau),$$

welche eine von der Basis unabhängige Bedeutung hat, nenne ich die Kommutatorform. Wendet man (26) an für eine gegen ∞ konvergierende Zahl $k = l = m$ und $\mathbf{1} + \frac{A}{m}$, $\mathbf{1} + \frac{B}{m}$ anstelle von A und B, so erhält man im Limes als den Kommutator irgend zweier Elemente der Gruppe $U(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_f) = U(\sigma)$ und $U(\tau)$:

15 (37)

$$U(\sigma) U(\tau) U^{-1}(\sigma) U^{-1}(\tau) = e(L(\sigma,\tau)) \cdot \mathbf{1}.$$

16 (Zur Bequemlichkeit des Setzers schreibe ich oft $e(x)$ statt e^{ix}.) Dieselbe Einsetzung in (27) mit nachfolgendem Grenzübergang liefert noch

$$U(\sigma + \tau) = e\left(\tfrac{1}{2} L(\sigma,\tau)\right) U(\tau) U(\sigma) = e\left(-\tfrac{1}{2} L(\sigma,\tau)\right) U(\sigma) U(\tau).$$

Wenn die Drehungsgruppe irreduzibel ist, kann ein festes $U(\sigma)$ nur dann mit allen $U(\tau)$ vertauschbar sein, wenn es $\simeq 1$ ist, d.h. wenn die Parameter σ_i verschwinden. Das besagt, dass die Kommutatorform nicht-ausgeartet ist, nämlich für ein festes Wertsystem σ_i nicht identisch in τ_i verschwinden kann, ohne dass alle $\sigma_i = 0$ sind. (Es kommt das darauf hinaus, dass die Determinante $|c_{ik}| \neq 0$ ist.) Eine solche Form existiert nur, wenn die Variablenzahl f gerade ist, und ihr kann durch geeignete Wahl der Basis (dadurch dass die Variablen σ_i und τ_i kogredient einer geeigneten linearen Transformation unterworfen werden) eine numerisch bestimmte eindeutig Gestalt verliehen werden: Die Koeffizientenmatrix $\|c_{ik}\|$ zerfällt in lauter zweireihige Quadrate $\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$, die sich längs der Hauptdiagonale aneinanderreihen. Es ist dann zweckmässiger $2f$ anstelle von f zu schreiben, die so eingeführte "kanonische Basis" mit

$$iP_\nu, \quad iQ_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, f)$$

zu bezeichnen und die zugehörigen Parameter kanonisch gepaarten mit σ_ν, τ_ν. Der Faktor i ist beigefügt, um auf Hermitesche Formen $\mathfrak{P}_\nu, \mathfrak{Q}_\nu$ zu kommen. Es gelten die Vertauschungsrelationen

$$(36)\quad \begin{cases} i(\mathfrak{P}_\nu \mathfrak{Q}_\nu - \mathfrak{Q}_\nu \mathfrak{P}_\nu) = \underline{1}, \quad i(\mathfrak{P}_\mu \mathfrak{Q}_\nu - \mathfrak{Q}_\nu \mathfrak{P}_\mu) = 0 \text{ für } \mu \neq \nu, \\ \text{und} \quad \mathfrak{P}_\mu \mathfrak{P}_\nu - \mathfrak{P}_\nu \mathfrak{P}_\mu = 0, \quad \mathfrak{Q}_\mu \mathfrak{Q}_\nu - \mathfrak{Q}_\nu \mathfrak{Q}_\mu = 0 \text{ für alle } \mu, \nu. \end{cases}$$

Die

$$U(\sigma) = e(\sigma_1 \mathfrak{P}_1 + \sigma_2 \mathfrak{P}_2 + \cdots + \sigma_f \mathfrak{P}_f)$$

bilden für sich eine f-parametrige Abelsche Gruppe (inhomogener) unitärer Abbildungen, ebenso die

$$V(\tau) = e(\tau_1 \mathfrak{Q}_1 + \tau_2 \mathfrak{Q}_2 + \cdots + \tau_f \mathfrak{Q}_f).$$

Hingegen ist

$$U(\sigma)\, V(\tau)\, U^{-1}(\sigma)\, V^{-1}(\tau) = e(\sigma_1 \tau_1 + \cdots + \sigma_f \tau_f) \cdot \underline{1}$$

und

$$(37)\quad \begin{aligned} & e(\sigma_1 \mathfrak{P}_1 + \cdots + \sigma_f \mathfrak{P}_f + \tau_1 \mathfrak{Q}_1 + \cdots + \tau_f \mathfrak{Q}_f) \\ & = e\Big(\tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{f} \sigma_i \tau_i\Big)\, V(\tau)\, U(\sigma) = e\Big(-\tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{f} \sigma_i \tau_i\Big)\, U(\sigma)\, V(\tau). \end{aligned}$$

§7. Ersatz der kanonischen Variablen durch die Gruppe. Das Elektron.

Unsere Entwicklungen sind bis zu dem Punkte gediehen, wo die Verbindung mit der Quantenmechanik in die Augen springt. Liegt ein mechanisches System von f Freiheitsgraden vor, so genügen ja die Hermiteschen Matrizen, welche die kanonischen Variablen repräsentieren, gerade den Relationen (36) - bis auf den Faktor $\frac{h}{2\pi}$, von dem noch die Rede sein wird und den wir einstweilen in die Masseinheiten hineinstekken. Nehmen wir die Zahl der Freiheitsgrade f zunächst = 1 und bezeichnen in der üblichen Weise die kanonischen Variablen mit p, q, ihre repräsentierenden Formen mit $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$, so sagt die Relation

$$(38)\quad i(\mathfrak{P}\mathfrak{Q} - \mathfrak{Q}\mathfrak{P}) = \underline{1}$$

aus, dass die beiden durch die Matrizen $i\mathfrak{P}, i\mathfrak{Q}$ gekennzeichneten infinitesimalen Drehungen des Strahlenkörpers vertauschbar sind. Die durch sie erzeugte Abelsche Drehungsgruppe besteht aus den Drehungen

$$(39)\quad U(\sigma, \tau) = e(\mathfrak{P}\sigma + \mathfrak{Q}\tau)$$

(σ, τ reelle Parameter, die sich bei Zusammensetzung additiv verhalten). Die reelle Grösse im Gruppengebiet, deren Komponenten $\xi(\sigma, \tau)$ der Gleichung (19) oder

$$(40)\quad \bar{\xi}(\sigma, \tau) = \xi(-\sigma, -\tau)$$

genügen, erscheint als die Hermitesche Form

$$(41)\quad \mathfrak{F} = \iint_{-\infty}^{+\infty} e(\mathfrak{P}\sigma + \mathfrak{Q}\tau)\, \xi(\sigma, \tau)\, d\sigma\, d\tau.$$

Eine physikalische Grösse ist durch ihren Funktionsausdruck $f(p,q)$ in den kanonischen Variablen p, q mathematisch definiert. Es blieb ein Problem, wie ein derartiger Ausdruck auf die Matrizen zu übertragen war. Ohne weiteres klar war das nur für die Potenzen p^2, q^2 und damit für Polynome. Freilich trat schon hier die Schwierigkeit auf, dass man nicht wusste, ob man einen Term wie $p^2 q$ als $P^2 Q$ oder $Q P^2$ oder PQP u.s.w zu interpretieren hatte. Der Ansatz ist offenbar viel zu formal. Unsere gruppentheoretische Auffassung zeigt sogleich den rechten Weg: die Hermitesche Form (41) repräsentiert die Grösse

$$f(p,q) = \iint_{-\infty}^{+\infty} e(p\sigma + q\tau)\, \xi(\sigma,\tau)\, d\sigma\, d\tau. \tag{42}$$

Nach dem Fourierschen Integraltheorem lässt sich ja jede Funktion $f(p,q)$ in dieser Form eindeutig entwickeln, und wenn f eine reellwertige Funktion der reellen Veränderlichen p, q ist, genügt $\xi(\sigma,\tau)$ gerade der Bedingung (40). Die Integralentwicklung (42) ist nicht immer ganz wörtlich zu verstehen; das Wesentliche ist nur, dass rechts eine lineare Kombination der $e(p\sigma + q\tau)$ steht, in denen σ und τ beliebige reelle Werte annehmen können. Wenn z.B. q eine zyklische Koordinate ist, die nur mod. 2π zu verstehen ist, sodass alle in Betracht kommenden Funktionen periodisch in q mit der Periode 2π sind, wird die Integration nach τ ersetzt werden müssen durch eine Summation über alle ganzen Zahlen τ; wir haben dann den Fall einer gemischten kontinuierlich-diskreten Gruppe. Die Einschränkungen, denen $f(p,q)$ unterworfen sein muss, damit sie eine Entwicklung des Typus (42) gestattet, könnten noch Bedenken erregen. Nun wissen wir aber, dass es eigentlich gilt, $e(k f(p,q))$ so zu entwickeln (k irgend eine reelle Konstante), und in dieser Fassung lässt sich die Aufgabe nach neueren Untersuchungen von N.Wiener, Bochner und Hardy in zwingender Weise eindeutig erledigen.[11]

Die Uebertragung auf f Freiheitsgrade liegt auf der Hand. Insbesondere sahen wir, wie aus der Forderung der Irreduzibilität im Falle der kontinuierlichen Gruppen die charakteristische kanonische

---

[11] N.Wiener, On representations of functions by trigonometrical integrals, Math. Zeitschr. 24, 575, 1926. S.Bochner u. G.H.Hardy, Note on two theorems of N.Wiener, Journ. Lond. Math. Soc. 1, 240, 1926. S.Bochner, Darstellung reell variabler und analytischer Funktionen durch verallgemeinerte Fourier- und Laplace-Integrale, Math. Annalen 97, 635, 1927. Vergl. dazu ferner die von H. Bohr stammende Theorie der fastperiodischen Funktionen; am einfachsten bei H.Weyl, Math. Annalen, 97, 338, 1926.

Paarung entspringt. Für endliche Gruppen freilich existiert nicht ein so einheitliches Schema. Das ist in Einklang mit den physikalischen Tatsachen. Denn aus den Entwicklungen von P. Jordan [12] ging bereits hervor, dass beim magnetischen Elektron σ_y so gut wie σ_z als die "kanonische Konjugierte" von σ_x angesehen werden kann. Höchstens von einem Tripel, nicht von einem Paar kanonisch konjugierter Grössen könnte hier vernünftigerweise die Rede sein. Bestätigen wir, dass gerade auch in diesem diskreten, dem Kontinuierlichen am meisten entgegengesetzten Fall unsere Formulierung genau das Richtige trifft! Sie lautet, um das noch einmal zusammenzufassen, so: Der kinematische Charakter eines physikalischen Systems findet seinen Ausdruck in einer irreduziblen Abelschen Drehungsgruppe, deren Substrat der Strahlenkörper der "reinen Fälle" ist. Die reellen Grössen dieses Gruppengebietes sind die physikalischen Grössen; die Hermiteschen Matrizen, als welche sie vermöge der Darstellung der abstrakten Gruppe durch Drehungen erscheinen, sind die Repräsentanten der physikalischen Grössen, deren Bedeutung im I. Teil auseinandergesetzt wurde.

Nun: die früher beschriebene zweidimensionale Drehungsgruppe $\mathfrak{D}$, welche der Vierergruppe isomorph ist, kennzeichnet, wie der Vergleich mit S. — lehrt, die Kinematik des magnetischen Elektrons. Da $n = 2$ ist, sind alle Grössen nur zweier Werte fähig. Die einzigen physikalischen Grössen, welche existieren, sind die mit Hülfe reeller Zahlkoeffizienten gebildeten linearen Kombinationen von $1, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$. Aber das magnetische Elektron ergibt sich nicht nur als Sonderfall der Theorie, sondern die ihm eigentümliche Kinematik ist überhaupt die einzig mögliche, wenn alle Grössen nur zweier Werte fähig sein sollen, wenn $n = 2$ ist. Beweis: Wir wissen schon, dass unter dieser Voraussetzung jedes Gruppenelement a ausser dem Einheitselement von der Ordnung 2 ist. Die korrespondierende zweidimensionale Drehung lautet, auf Hauptachsen transformiert:

$$A \simeq \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix},$$

---

[12] Z~~eitschr~~. f. Phys~~ik~~ 44, 21 - 25, 1927. Nach P. Jordan, Ueber die Polarisation der Lichtquanten, Z~~eitschr~~. f. Phys~~ik~~ 44, 292, 1927, ist die Kinematik der Lichtquanten die gleiche.

die Eigenwerte sind entgegengesetzt gleich. Wählen wir ein bestimmtes $a \neq 1$, so können wir das zugehörige $\mathcal{A}$ samt einem normalen Koordinatensystem so festlegen, dass

$$(43) \qquad \mathcal{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

wird. Die mit $\mathcal{A}$ vertauschbaren Matrizen U unserer Gruppe haben notwendig die Gestalt $\begin{Vmatrix} c & 0 \\ 0 & c' \end{Vmatrix}$; wenn sie nicht $\simeq 1$ sind, ist $c' = -c$, U also $\simeq \mathcal{A}$. Es gibt Gruppenelemente, deren Matrix $\mathcal{B}$ nicht mit $\mathcal{A}$ vertauschbar ist. Wir wissen, dass in der Gleichung

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \varepsilon \mathcal{B}\mathcal{A}$$

ε eine 2. Einheitswurzel, darum $\varepsilon = -1$ sein muss. Daraus folgt, dass $\mathcal{B}$ die Gestalt

$$(44) \qquad \mathcal{B} = \begin{Vmatrix} 0 & b \\ b' & 0 \end{Vmatrix}$$

hat. Die Zahlen b, b' sind vom absoluten Betrag 1. Wir wählen ein bestimmtes solches $\mathcal{B}$, das gemäss $\mathcal{B}^2 = \mathbf{1}$ geeicht sei: $bb' = 1$. Ausserdem kann man b zu 1 machen, indem man das bisherige normale Koordinatensystem x_1, x_2 durch x_1, bx_2 ersetzt; (43) wird dadurch nicht angegriffen:

$$(45) \qquad \mathcal{B} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Jede Matrix U unserer Gruppe, welche mit $\mathcal{A}$ vertauschbar ist, ist $\simeq \mathbf{1}$ oder $\simeq \mathcal{A}$. Wenn sie nicht mit $\mathcal{A}$ vertauschbar ist, hat sie die Form (44), und demnach ist ~~seine~~ ihre Zusammensetzung $U\mathcal{B}$ mit dem durch (45) gegebenen bestimmten $\mathcal{B}$ eine Diagonalmatrix. Als solche ist sie mit $\mathcal{A}$ vertauschbar, also $\simeq \mathbf{1}$ oder $\simeq \mathcal{A}$. Das Resultat ist, dass jedes $U \simeq$ einer von den vier Matrizen $\mathbf{1}, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{A}\mathcal{B}$ ist. Es liegt in der Tat die Vierergruppe vor und die Darstellung $\mathfrak{V}$ derselben.

§8. Uebergang zu Schrödingers Wellentheorie.

In ähnlicher Weise, wie soeben der Fall $n = 2$ behandelt wurde, wollen wir jetzt zeigen, dass die zweiparametrigen kontinuierlichen Gruppen nur einer irreduziblen Darstellung in unserm Sinne (ausser der identischen) fähig sind. Wir erhalten ~~sie~~ jene Gruppen durch Grenzübergang aus den zweibasigen endlichen. Die irreduzible Abelsche Drehungsgruppe mit

der Basis $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ habe die Dimensionszahl n. In der Kommutatorgleichung

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \varepsilon \mathcal{B}\mathcal{A} \tag{46}$$

ist ε eine n^{te} Einheitswurzel. Diese Gleichung gilt es jetzt näher zu untersuchen. Die Kommutatorzahl ε sei eine primitive m^{te} Einheitswurzel, d.h. ε^m sei die niederste Potenz, welche = 1 ist; m ist Teiler von n. Die Drehungen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sind von einer in n aufgehenden Ordnung: $\mathcal{A}^n \simeq 1$, $\mathcal{B}^n \simeq 1$, und die Matrizen können daher so geeicht werden, dass $\mathcal{A}^n = \mathcal{B}^n = 1$ ist. Durch geeignete Wahl des normalen Koordinatensystems sei $\mathcal{B}$ auf Hauptachsen gebracht; die Glieder in der Hauptdiagonale, b_i, sind lauter n^{te} Einheitswurzeln. Die Gleichung (46) liefert für die Koeffizienten von $\mathcal{A} = \|a_{ik}\|$:

$$\frac{b_k}{b_i} a_{ik} = \varepsilon a_{ik}. \tag{47}$$

Man teile die Indizes i und zugehörigen Variablen x_i in Klassen nach dem Prinzip, dass i und k in dieselbe Klasse fallen, wenn der Quotient b_i / b_k eine m^{te} Einheitswurzel, eine Potenz von ε ist. Dies ist wirklich eine Klasseneinteilung, da mit b_i / b_k und b_k / b_l auch b_i / b_l Potenz von ε ist. Gemäss der Gleichung (47) ist $a_{ik} = 0$, wenn i und k zu verschiedenen Klassen gehören; die Matrix $\mathcal{A}$ zerfällt demnach in der gleichen Weise, wie die Indizes in Klassen zerfallen. Wegen der vorausgesetzten Irreduzibilität ist also nur eine Klasse vorhanden.

Nachdem dies erkannt ist, gehen wir zu einer feineren Klasseneinteilung über: jetzt sollen i und k nur dann zur selben Klasse gehören, wenn $b_i = b_k$ ist. Wir wählen willkürlich eine dieser Klassen, für welche $b_i = b$ ist, als die erste, lassen dann als zweite diejenige folgen, für die $b_i = \varepsilon b$ ist, darauf die dritte mit $b_i = \varepsilon^2 b$, ..., die m^{te} mit $b_i = \varepsilon^{m-1} b$; die $(m+1)^{te}$ Klasse: $b_i = \varepsilon^m b$, ist wieder die erste. In dieser Reihenfolge denken wir auch die Variablen angeschrieben und numeriert. Nach der Gleichung (47) sind in der Matrix $\mathcal{A}$ alle Felder (i,k) leer, $a_{ik} = 0$, deren Zeilen- und Spalten-Index i und k nicht zu zwei aufeinander folgenden Klassen gehören. Die Matrix $\mathcal{A}$ hat daher das nebenstehend angedeutete Schema, in welchem die nicht schraffierten Gebiete leer stehen und übrigens $m = 4$ angenommen wurde. In den schraffierten Gebieten stehen die "Teilmatri-

Figur!

zen" $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(m)}$. Da A unitär ist, summieren sich die absoluten Quadrate der Glieder in jeder Zeile und in jeder Spalte zu 1. Infolgedessen gilt das Gleiche für die Zeilen und Spalten der einzelnen Teilmatrix. Die Summe der absoluten Quadrate aller in $A^{(1)}$ stehenden Glieder ist darum einerseits gleich ihrer Zeilen-, anderseits gleich ihrer Spaltenzahl. Ihr Rechteck ist in Wahrheit ein Quadrat, die 2. Klasse besteht aus ebenso vielen Individuen d wie die erste. Alle Klassen sind gleich stark, $n = md$. Danach ist die Figur zu korrigieren. Genauer ist jede der schraffierten Teilmatrizen für sich unitär. Indem wir auf die erste Klasse von Variablen die unitäre Transformation mit der Matrix $A^{(1)}$ ausüben, bewirken wir, dass sich $A^{(1)}$ in die d-dimensionale Einheitsmatrix verwandelt. Diese Normalform wird nicht zerstört, wenn man nachträglich die Variablen der ersten Klasse und ebenso die Variablen der 2. Klasse, jede für sich, der gleichen beliebigen unitären Transformation unterwirft. Dies können wir dazu benutzen, um auch die 2. Teilmatrix in die Einheitsmatrix umzuwandeln; u.s.f. bis zur $(m-1)^{\text{ten}}$. Die damit erzielte Normalform wird nicht zerstört, wenn die Variablen jeder Klasse untereinander der gleichen unitären Transformation unterliegen. Diese Transformation kann man schliesslich, wie man weiss, noch so bestimmen, dass die letzte Teilmatrix $A^{(m)}$ eine Diagonalmatrix wird. Nunmehr nehmen wir eine Umnummerierung vor, indem wir zunächst aus jeder Klasse das erste Glied auslesen, darauf aus jeder Klasse das 2., u.s.f. Dann zerfällt A in d Teilmatrizen, die sich längs der Hauptdiagonale aneinanderreihen. Wegen der vorausgesetzten Irreduzibilität ist nur eine davon vorhanden: $d = 1$, $n = m$. Wir haben die Normalform (die nicht ausgefüllten Felder „stehen leer"):

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} \varepsilon^{r} & & & & \\ & \varepsilon^{r+1} & & & \\ & & \varepsilon^{r+2} & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \varepsilon^{n+r-1} \end{Vmatrix}.$$

Die Exponenten in B sind n aufeinander folgende ganze Zahlen, ε ist eine primitive n^{te} Einheitswurzel. Die Gleichung $A^n = 1$ liefert endlich noch $a = 1$. Lassen wir die Variablennummern von r ab laufen und verstehen alle Indizes mod. n, so lauten die beiden Abbildun-

gen

$$\mathcal{A}: \quad x'_k = x_{k-1} \quad , \qquad \mathcal{B}: \quad x'_k = \varepsilon^k x_k \ .$$

Daraus sofort die Wiederholungen

$$(48) \qquad \mathcal{A}^s: \quad x'_k = x_{k-s} \quad , \qquad \mathcal{B}^t: \quad x'_k = \varepsilon^{kt} x_k \ .$$

Jetzt lässt sich in aller Strenge der Grenzübergang zu kontinuierlichen Gruppen vollziehen. Es sei (39) die kontinuierliche zweiparametrige irreduzible Abelsche Drehungsgruppe. Die Basis $i\mathcal{P}, i\mathcal{Q}$ sei nach (38) normiert. Wir identifizieren in unserer Betrachtung $\mathcal{A}$ mit dem infinitesimalen $e(\xi\mathcal{P})$, $\mathcal{B}$ mit $e(\eta\mathcal{Q})$, ξ und η reellen infinitesimale Konstanten. Es ist $e(\sigma\mathcal{P}) = \mathcal{A}^s$, $e(\tau\mathcal{Q}) = \mathcal{B}^t$, wenn im Limes $s\xi = \sigma$, $t\eta = \tau$ wird. ε fällt mit $e(\xi\eta)$ zusammen, ε^{kt} ist $= e(\xi k \tau)$. $e(\tau\mathcal{Q})$ ist die Repräsentation der physikalischen Grösse $e^{i\tau q}$; diese ist also (bei beliebigem reellen τ) der Werte fähig $e^{i\tau\xi k}$, wo k die ganzen Zahlen $r, r+1, \dots$ durchläuft. Mit andern Worten: q ist der Werte $k\xi$ fähig, ihr Wertbereich ein kontinuierliches zusammenhängendes Intervall, das nach einer oder nach beiden Seiten ins Unendliche sich erstreckt. (Unsere Anordnung der Variablen x_k bedeutete also, dass wir die Werte der Variablen q in ihrer natürlichen Grössenfolge durchlaufen.) Darum schreiben wir jetzt q anstelle von $k\xi$, unter q zugleich eine Variable verstehend, welche den Wertbereich der physikalischen Grösse q durchläuft, und $\sqrt{\xi}\cdot\psi(q)$ anstelle von x_k. $\psi(q)$ ist eine willkürliche komplexwertige Funktion, welche der Normierungsgleichung

$$(49) \qquad \int |\psi(q)|^2 \, dq = 1$$

unterworfen ist. Ihre Werte sind aufzufassen als die den verschiedenen Werten von q entsprechenden Komponenten eines "reinen Falls" in demjenigen normalen Koordinatensystem, das aus den Eigenvektoren der Grösse q besteht. – Anstelle der zweiten Gleichung (48) erhalten wir im Limes

$$(50) \qquad \psi' = \psi V_\tau : \qquad \psi'(q) = e^{i\tau q} \cdot \psi(q) :$$

Das ist die unitäre Abbildung V_τ, welche die Grösse $e^{i\tau q}$ darstellt. Der gleiche Grenzübergang an der ersten Gleichung liefert die unitäre Abbildung

$$(51) \qquad \psi' = \psi U_\sigma : \qquad \psi'(q) = \psi(q - \sigma) ,$$

welche $e^{i\sigma p}$ repräsentiert. Beide Abbildungen sind in der Tat unitär, weil sie die Gleichung (49) invariant lassen; sie bilden, den verschiedenen Werten von σ bezw. τ entsprechend, zwei einparametrige

Abelsche Gruppen linearer Funktionaltransformationen:

$$U_{\sigma+\sigma'} = U_\sigma U_{\sigma'}, \quad V_{\tau+\tau'} = V_\tau V_{\tau'}.$$

$\psi U_\sigma V_\tau$ ist die Funktion $e^{i\tau q}\cdot\psi(q-\sigma)$, $\psi V_\tau U_\sigma$ aber $=$ $e^{i\tau(q-\sigma)}\cdot\psi(q-\sigma)$, sodass, wie es sein muss, die Kommutatorgleichung gilt:

$$\psi U_\sigma V_\tau = e^{i\sigma\tau}\cdot\psi V_\tau U_\sigma.$$

Der Grösse $e(\sigma p+\tau q)$ entspricht nach (37) die Abbildung

$$\psi(q)\to\psi'(q) = e^{-\frac{1}{2}i\sigma\tau}\cdot e^{i\tau q}\,\psi(q-\sigma).$$

Geht man endlich auf die infinitesimalen Operationen zurück - was freilich im allgemeinen nicht zweckmässig ist -, so bekommt man als Repräsentation von

(52) $p:\ \delta\psi = i\dfrac{d\psi(q)}{dq}$, von $q:\ \delta\psi = q\cdot\psi(q)$.

Damit sind wir bei der Schrödingerschen Fassung angelangt. Die Eigenfunktionen $\psi_n(q)$ seiner Wellengleichung haben danach die Bedeutung, dass sie die unitäre Transformation angeben, welche zwischen den beiden Hauptachsensystemen der Grösse q und der Energie $\mathcal{E}$ vermittelt. Im Hinblick auf den ersten Teil ergeben sich daraus die bekannten Pauli'schen Ansätze für ihre Wahrscheinlichkeitsbedeutung.

Die Uebertragung auf mehrere Freiheitsgrade ist mühelos durchführbar. Die Kinematik eines Systems, die durch eine kontinuierliche Gruppe ausgedrückt wird, ist darum durch die Zahl der Freiheitsgrade f eindeutig determiniert. Unsere Behandlung ist gültig auch für den Fall, dass die Grösse q eine zyklische Koordinate ist, die nur mod. 2π in Betracht kommt. Dann durchläuft τ nur die ganzen Zahlen, die Gruppe ist halb diskontinuierlich. Die Repräsentationen (50) und (51) von $e^{i\tau q}$ und $e^{i\sigma p}$ bleiben bestehen; aber da τ nur ganzzahlige Werte annimmt, hat es keinen Sinn mehr, ~~durch~~ den Grenzübergang $\tau\to 0$ zu vollziehen ~~dem infinitesimalen (52) überzugehen~~. Eine "physikalische Grösse q", welche durch eine Hermitesche Form zu repräsentieren wäre, gibt es überhaupt gar nicht, wohl aber z.B. $\cos q$.

Oft ist es zweckmässig, Koordinaten und Impulse zu vertauschen, anstelle der Komponenten $\psi(q)$ der Vektoren die Komponenten $\varphi(p)$ im System der Eigenvektoren von p zu verwenden. Ihr Zusammenhang ist der durch die "Fouriersche Transformation"

$$\psi(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqp}\,\varphi(p)\,dp$$

gegebene.[13] Denn die Abbildung V_τ verwandelt $\varphi(q)$ in

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iq(p+\tau)}\varphi(p)\,dp = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqp}\varphi(p-\tau)\,dp,$$

U_σ aber in

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqp}\cdot e^{-i\sigma p}\varphi(p)\,dp.$$

Es ist also

$$\varphi(p)V_\tau = \varphi(p-\tau), \qquad \varphi(p)U_\sigma = e^{-i\sigma p}\varphi(p). \tag{53}$$

III. Teil. Das dynamische Problem.

§9. Das Gesetz der zeitlichen Veränderung. Die Zeitgesamtheit.

Die bisherigen Ansätze beanspruchen allgemeine Geltung. Nicht so günstig steht es mit dem dynamischen Problem, das eng mit der Frage nach der Rolle zusammenhängt, welche Raum und Zeit in der Quantenphysik spielen. In der Feldtheorie werden Zustandsgrössen behandelt, die in Raum und Zeit ausgebreitet sind, die Mechanik im engeren Sinne hat es nur mit der Zeit als der einzigen unabhängigen Veränderlichen zu tun. Die unabhängigen Veränderlichen sind keine gemessenen Grössen, sie sind ein willkürlich in die Welt hineingetragenes gedachtes Koordinaten-Spinngewebe. Die Abhängigkeit einer physikalischen Grösse von diesen Variablen ist also auch nicht etwas durch Messung zu kontrollierendes; erst wenn mehrere physikalische Grössen vorliegen, kommt man durch Elimination der unabhängigen Veränderlichen zu Beziehungen zwischen beobachtbaren Grössen. Es mag sein, dass unter diesen Zustandsgrössen die Raumkoordinaten eines Elektrons auftreten; gemessener, real markierter Ort und natürlich auch real markierte Zeit sind Zustandsgrössen und werden also durch Hermitesche Formen zu repräsentieren sein. Diesem Sachverhalt gegenüber ist die nicht-relativistische Mechanik in der glücklichen Lage, die Zeit als Zustandsgrösse ignorieren zu können, während die Relativitäts-Mechanik parallel mit den messbaren Raumkoordinaten auch die messbaren Zeitkoordinaten der Teilchen benötigt. Eine vollständige Durchführung der Quantentheorie liegt bisher nur in dem Umfang vor, in welchem nur die Zeit als unabhängige Variable und die Zeit nur als unabhängige Variable auftritt.

Da die Hermitesche Form, welche zu einer physikalischen Grös-

---

[13] Nach einem wichtigen Satz von Plancherel (Rend. Circ. Mat. Palermo 30, 330, 1910) und Titchmarsh (Lond. Math. Soc. Proc. (2) 23, 279, 1924) hat diese Transformation für alle absolut-quadratisch integrierbaren Funktionen einen klaren Sinn und erhält (bis auf den Faktor 2π) das Quadratintegral.

se gehört, nichts zu tun hat mit besonderen Werten, welche die Grösse unter Umständen, insbesondere im Laufe der Zeit annimmt, bleibt sie von der Zeit unberührt. Was sich im Laufe der Zeit t ändert, ist allein der reine Fall $\varphi^{(t)}$. Das dynamische Gesetz gibt die infinitesimale Verschiebung an, die $\varphi^{(t)}$ während des Zeitelements dt erfährt:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{2\pi i}{h} \cdot \varphi \mathcal{E}. \tag{54}$$

Hier ist $i\mathcal{E}$ die infinitesimale unitäre Abbildung, welche mit der die Energie repräsentierenden Hermiteschen Form $\mathcal{E}$ gekoppelt ist, h das Wirkungsquantum. Die mit dem Vorrücken der Zeit um dt verbundene Aenderung $A(\varphi + d\varphi) - A(\varphi)$ irgend einer Hermiteschen Form $A(\varphi)$ ist, wie man leicht ausrechnet,

$$dA = \frac{2\pi i\, dt}{h}(A\mathcal{E} - \mathcal{E}A). \tag{55}$$

$d\mathcal{E}$ ist = 0. Bringt man die Hermitesche Form $\mathcal{E}$ der Energie auf Hauptachsen:

$$\mathcal{E}(\varphi) = \mathcal{E}_1 x_1 \bar{x}_1 + \mathcal{E}_2 x_2 \bar{x}_2 + \cdots + \mathcal{E}_n x_n \bar{x}_n,$$

so bezeichnen die Nummern 1 bis n die möglichen Quantenzustände, $\mathcal{E}_i$ die zugehörigen Energiestufen, und in den Gleichungen (54) separieren sich die Variablen:

$$\frac{dx_\nu}{dt} = -\frac{2\pi i \mathcal{E}_\nu}{h} x_\nu .$$

Die Integration lässt sich sofort ausführen:

$$x_\nu(t) = x_\nu \cdot e\left(-\frac{2\pi \mathcal{E}_\nu t}{h}\right). \tag{56}$$

Die Hermitesche Form

$$A(\varphi) = \sum a_{\mu\nu} x_\mu \bar{x}_\nu$$

ist nach Ablauf der Zeit t übergegangen in

$$\sum a_{\mu\nu} x_\mu(t) \bar{x}_\nu(t) = \sum a_{\mu\nu}(t) x_\mu \bar{x}_\nu \quad \text{mit}$$

$$a_{\mu\nu}(t) = a_{\mu\nu} \cdot e\left(\frac{2\pi t(\mathcal{E}_\nu - \mathcal{E}_\mu)}{h}\right).$$

Die Komponenten $a_{\mu\nu}$ im Hauptachsensystem der Energie führen also einfache Schwingungen aus mit den Bohr'schen Frequenzen. Nach (56) bleiben nicht nur die Energiestufen $\mathcal{E}_\nu$ während der Bewegung erhalten, sondern auch die Häufigkeiten $|x_\nu(t)|^2 = |x_\nu|^2$, mit denen sie vertreten sind.

Das bisher Gesagte gilt für ein abgeschlossenes System. Wenn man innerhalb eines abgeschlossenen Systems ein Teilsystem ins Auge fasst, das unter dem Einfluss des Restes steht, dessen Rückwirkung auf den Rest aber vernachlässigt wird, so hat man den Fall der von aussen

eingeprägten Kräfte: die Hamiltonsche Funktion hängt explizite von der Zeit ab. Die Hermiteschen Formen, welche die Energie und andere Grössen am System darstellen, sind Funktionen der Zeit: $A = A(t; \mathfrak{x})$. Das Gesetz der zeitlichen Verschiebung des reinen Falls $\mathfrak{x}(t)$ bleibt das gleiche. Die Formel (31) in § 6 gestattet die integrale Aneinandereihung der von Schritt zu Schritt in der Zeit sich vollziehenden infinitesimalen Drehungen (54). So berechne man die Drehung $U(t_1, t_2)$, welche von $\mathfrak{x}(t_1)$ zu $\mathfrak{x}(t_2)$ führt.

Findet die Einwirkung von aussen nur in dem Zeitintervall $t_1\ t_2$ statt, während vor t_1 und nach t_2 das System abgeschlossen ist, so entnimmt man der Matrix $U(t_1, t_2)$ insbesondere, wie sich die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Energiestufen $\mathcal{E}_\mu$ durch die Einwirkung verschoben haben. Darauf bezieht sich die Untersuchung von M. Born über das Adiabatenprinzip in der Quantenmechanik, Zeitschr. f. Physik 40, 167, 1927.

Wenn die Zeit nicht messbare Grösse, sondern nur unabhängige Variable ist, haben nur solche Beziehungen konkrete Bedeutung, aus denen die Zeit eliminiert ist. Tatbestände von diesem Charakter sind in der Quantenmechanik eines abgeschlossenen Systems: der Wertevorrat, welchen eine gegebene Grösse durchlaufen kann, und die zeitlichen Mittelwerte der Wahrscheinlichkeiten $W(\mathfrak{x})$, mit denen eine gegebene Grösse Werte in gegebenen Grenzen annimmt. Handelt es sich um den reinen Fall

$$\mathfrak{x}: \quad x_\nu = c_\nu e^{i\gamma_\nu} \quad (c_\nu \geqq 0,\ \gamma_\nu \text{ reell}),$$

so durchläuft $\mathfrak{x}(t)$ nach (56), wenn die Energiestufen nicht speziellen linearen Rationalitätsbeziehungen genügen, gleichmässig dicht das ganze durch

$$|x_1| = c_1, \quad |x_2| = c_2, \quad \ldots, \quad |x_n| = c_n$$

definierte Gebilde $\mathfrak{G}$ von n reellen Dimensionen. In den Ausnahmefällen reduziert sich die Dimensionszahl.[14] Zur Berechnung der zeitlichen Mittelwerte ist über dieses gleichmässig dicht von der Zeitkurve erfüllte Gebiet $\mathfrak{G}$ zu integrieren.

Ich erinnere noch kurz an die Beziehung der Energie und der Hamiltonschen Gleichung zu den kanonischen Variablen. Hat das mechanische System einen Freiheitsgrad und ist eine Funktion (42) der kanoni-

---

[14] Vergl. H.Weyl, Ueber die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, Math. Ann. 77, 313, 1916.

schen Variablen p, q repräsentiert durch die Matrix (41),

so sind gemäss unserer Festsetzung die beiden Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial p} = f_p, \frac{\partial f}{\partial q} = f_q$ repräsentiert durch

$$\mathcal{F}_p = i \iint_{-\infty}^{+\infty} e(\sigma P + \tau Q) \cdot \sigma \xi(\sigma, \tau) \, d\sigma \, d\tau, \quad \mathcal{F}_q = i \iint_{-\infty}^{+\infty} e(\sigma P + \tau Q) \cdot \tau \xi(\sigma, \tau) \, d\sigma \, d\tau,$$

da entsprechende Fourierentwicklungen für f_p und f_q gelten. Wegen (38) ergibt die Kommutatorregel (35), wenn man $U(\tau)$ wieder infinitesimal werden lässt, die beiden Gleichungen

$$P \cdot e(\sigma P + \tau Q) - e(\sigma P + \tau Q) \cdot P = \tau \cdot e(\sigma P + \tau Q),$$
$$Q \cdot e(\sigma P + \tau Q) - e(\sigma P + \tau Q) \cdot Q = -\sigma \cdot e(\sigma P + \tau Q),$$

also

$$-\mathcal{F}_p = i(Q\mathcal{F} - \mathcal{F}Q), \quad \mathcal{F}_q = i(P\mathcal{F} - \mathcal{F}P).$$

Das dynamische Gesetz (54) ~~lautet~~ lässt sich daher, wenn $f(p, q)$ die Energiefunktion ist, nach (55) so fassen:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{2\pi}{h} \cdot \mathcal{F}_q, \quad \frac{dQ}{dt} = -\frac{2\pi}{h} \cdot \mathcal{F}_p.$$

Daraus sieht man: wenn a und b zwei reelle Zahlen vom Produkt $\frac{h}{2\pi}$ sind, repräsentieren aP und bQ Grössen, welche kanonisch sind in dem Sinne, dass für sie die klassischen Bewegungsgleichungen gelten. Auf diese Weise wird in konkreten Beispielen die Bestimmung der Energie als Grösse im Gruppengebiet durchgeführt. Bei solcher Beschreibung kommt das Wirkungsquantum nur einmal vor: in dem dynamischen Gesetz und nicht in den Vertauschungsrelationen. Sie basiert auf der Ueberzeugung, dass die formalen Beziehungen der klassischen Physik als solche zwischen den repräsentierenden Matrizen, nicht zwischen den angenommenen Werten, bestehen bleiben.

Will man den gerügten Mangel des Zeitbegriffs der alten vorrelativistischen Mechanik aufheben, so werden die messbaren Grössen: Zeit t und Energie $\mathcal{E}$ als ein weiteres kanonisch konjugiertes Paar auftreten, wie ja bereits das Wirkungsprinzip der analytischen Mechanik erkennen lässt; das dynamische Gesetz kommt ganz in Fortfall. Die Behandlung eines Elektrons im elektromagnetischen Feld nach der Relativitätstheorie durch Schrödinger u. A. entspricht bereits diesem Standpunkt.[15] Eine allgemeine Formulierung liegt noch nicht vor.

---

[15] Siehe etwa E. Schrödinger, Abhandlungen zu Wellenmechanik, Leipzig 1927, S. 163, = Annalen d. Physik (4) 81, 133, 1926.

§ 10. Kinetische Energie und Coulombsche Kraft in der relativistischen Quantenmechanik.

Innerhalb des Schemas, das die Zeit nur als unabhängige Variable kennt, ist wenigstens eine halb-relativistische Mechanik möglich, welche den richtigen Ausdruck für die kinetische Energie verwendet, aber die potentielle Energie nach wie vor als eine Funktion der Lagekoordinaten, und das heisst doch genauer: ihrer simultanen Werte annimmt. Zur Illustration der Theorie behandle ich den Fall eines oder mehrerer Teilchen, deren Lage durch ihre rechtwinkligen Koordinaten x, y, z gekennzeichnet wird. Der Ausdruck der kinetischen Energie in den zugehörigen Impulsen u, v, w lautet, wenn m die Masse des Teilchens bedeutet und c die Lichtgeschwindigkeit:

$$c\sqrt{m^2c^2 + u^2 + v^2 + w^2}.$$

Für die Durchrechnung ist es zweckmässig, die Koordinaten und Impulse des Teilchens auf die Masseinheiten $\frac{h}{2\pi mc}$, bezw. mc zu beziehen; dann sind sie dimensionslose Grössen und zugleich mit der von uns befürworteten Normierung der kanonischen Koordinaten in Einklang. Es handelt sich darum, die Abbildung oder Hermitesche Form zu konstruieren, welche dieser Grösse entspricht im Raume der Funktionen ~~von u, v, w~~ $\psi(x, y, z)$. Als Musterbeispiel diene der eindimensionale Fall. Es ist die Fourierzerlegung von $\sqrt{1+u^2}$ vorzunehmen. Im Sinne früherer Bemerkungen hat man diese Funktion zunächst etwa durch

$$e^{-\alpha|u|}\sqrt{1+u^2} \tag{57}$$

zu ersetzen mit einem kleinen positiven α und dann α gegen 0 konvergieren zu lassen. Setzen wir

$$\frac{1}{\pi}\mathcal{R}\int_0^\infty e^{-\alpha u}\sqrt{1+u^2}\, e^{-i\sigma u}\, du = g_\alpha(\sigma), \tag{58}$$

so ist die der Grösse (57) korrespondierende Abbildung

$$\psi(x) \to \psi'_\alpha(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x-\sigma)\, g_\alpha(\sigma)\, d\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} g_\alpha(x-\xi)\, \psi(\xi)\, d\xi, \tag{59}$$

die Hermitesche Form der willkürlichen Funktion $\psi(x)$ lautet:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} g_\alpha(x-\xi)\, \psi(x)\, \bar\psi(\xi)\, dx\, d\xi.$$

Um an der geraden Funktion $g_\alpha(\sigma)$ für $\sigma > 0$ den Grenzübergang zu $\alpha = 0$ zu vollziehen, schlagen wir in dem Integral, von dem $\pi g_\alpha(\sigma)$ nach (58) der Realteil ist, den Integrationsweg in die negative imaginäre Halbachse hinüber: $u = -it$, indem wir die Singularität $u = -i$ nach rechts hin umgehen:

(60) $$-i\int_0^1 e^{-(\sigma-i\alpha)t}\sqrt{1-t^2}\,dt-\int_1^\infty e^{-(\sigma-i\alpha)t}\sqrt{t^2-1}\,dt.$$

Im Limes für $\alpha=0$ ist der Realteil also

$$\mathcal{G}(\sigma)=-\frac{1}{\pi}\int_1^\infty e^{-\sigma t}\sqrt{t^2-1}\,dt \qquad (\sigma>0).$$

Daraus liest man sofort ab, dass

$$-\mathcal{G}(\sigma)=\frac{1}{\pi\sigma^2}-\Gamma(\sigma)$$

ist, wo Γ für $\sigma=0$ nur noch logarithmisch unendlich wird. In (58) macht der Grenzübergang zu $\alpha=0$ an dem Γ-Teil keine Schwierigkeit. In (60) ist der erste Summand bei $\alpha+i\sigma=0$ regulär, der zweite hängt eng mit derjenigen Hankelschen Zylinderfunktion 1. Ordnung $\mathcal{H}$ zusammen, die mit positiv wachsendem σ exponentiell zu 0 geht; er ist nämlich $=\frac{\mathcal{H}(\alpha+i\sigma)}{\alpha+i\sigma}$. Darum ist bis auf einen additiv hinzutretenden Teil, der an der kritischen Stelle $\alpha+i\sigma=0$ nur logarithmisch unendlich wird,

$$\mathcal{G}_\alpha(\sigma)\sim-\frac{1}{\pi}\,\mathcal{R}\,\frac{1}{(\sigma-i\alpha)^2}.$$

So kommt als Repräsentation der kinetischen Energie die Operation

(61) $$\psi(x)\to\psi'(x)=\psi^*(x)+\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(x-\xi)\,\psi(\xi)\,d\xi,$$
$$-\psi^*(x)=\lim_{z\to x}\mathcal{R}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\psi(\xi)\,d\xi}{(z-\xi)^2}$$

(der Einfachheit halber ist ψ reell angenommen). Der Grenzübergang ist so zu verstehen, dass z komplex $=x+iy$ ist mit positivem Imaginärteil y und y zu 0 strebt. Das in der letzten Gleichung hinter dem Zeichen $\mathcal{R}$ stehende Integral ist das i-fache der Ableitung derjenigen analytischen Funktion in der oberen Halbebene $y>0$, deren Realteil ψ auf der reellen Achse mit unserm $\psi(x)$ zusammenfällt. $-\psi^*(x)$ ist demnach die nach der inneren Normale n genommene Ableitung $\frac{d\psi}{dn}$ dieser Potentialfunktion am Rande. Da das über den Rand erstreckte Integral von $-\psi\frac{d\psi}{dn}$ nichts anderes ist als das Dirichletsche Integral $\mathcal{D}(\psi)$ über die obere Halbebene, haben wir schliesslich als die der Grösse $\sqrt{1+u^2}$ zugehörige Hermitesche Form:

$$\mathcal{D}(\psi)+\iint_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(x-\xi)\,\psi(x)\,\psi(\xi)\,dx\,d\xi.$$

Wenn es sich um ein einzelnes Teilchen handelt und eine (in der Einheit mc^2 gemessene) potentielle Energie $V(x)$ da ist, besteht das Eigenwertproblem darin,

$$\mathcal{D}(\psi)+\iint_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(x-\xi)\,\psi(x)\,\psi(\xi)\,dx\,d\xi+\int_{-\infty}^{+\infty}V(x)\,\psi^2(x)\,dx$$

zum Extremum zu machen unter der Nebenbedingung $\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^2\,dx=1$. Die Extremalwerte λ sind die Energiestufen.

Es ist klar, dass die Operation (61), wenn sie zweimal ausgeführt wird, zu derjenigen führen muss, die $1+u^2$ korrespondiert, d.i. zu $\psi(x)+\frac{d^2\psi}{dx^2}$. Deshalb kann die Schwingungsgleichung für das einzelne Teilchen auch in der Form einer gewöhnlichen Differentialgleichung angeschrieben werden:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\psi(x)=(\lambda-V(x))^2\psi(x).$$

Aber hier tritt der Eigenwert-Parameter λ nicht mehr in linearer Weise auf, und die Hälfte der Eigenwerte sind falsche. Auf solchem Weg gelang es Schrödinger und P. Epstein, die Energiestufen und Eigenfunktionen des Wasserstoffatoms relativistisch zu berechnen.[16] Wenn aber mehrere Teilchen im Spiel sind, ist es unmöglich, durch Iteration zu Differentialgleichungen zu gelangen.

Wenn die wirkenden Kräfte Coulombsche Kräfte sind, die von einem festen Kern ausgehen, ist es zweckmässig, die Komponenten φ der reinen Fälle im Hauptachsensystem der Impulskomponenten zu benutzen. Die kinetische Energie ist dann einfach repräsentiert durch die Multiplikation

$$\varphi\to\varphi':\quad \varphi'(u,v,w)=\sqrt{1+s^2}\cdot\varphi(u,v,w)$$
$$(s^2=u^2+v^2+w^2).$$

Es gilt, die repräsentierende Hermitesche Form für das Potential $\frac{1}{r}$ $(r^2=x^2+y^2+z^2)$ zu finden. Aus Konvergenzgründen werde $\frac{1}{r}$ zunächst ersetzt durch $\frac{e^{-lr}}{r}$, wo l eine kleine positive Konstante ist. Für das Integral in der Fourierzerlegung dieser Funktion

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-lr}}{r}\,e^{-i(\alpha x+\beta y+\gamma z)}\,dx\,dy\,dz$$

findet man leicht durch Einführung von Polarkoordinaten

$$\frac{4\pi}{l^2+\sigma^2}\qquad(\sigma^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$$

Die gesuchte Abbildung ist also diejenige, welche $\varphi(u,v,w)$ verwandelt in

NB. P = groß fett griech. Rho

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\varphi(u,v,w)&=\frac{1}{2\pi^2}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u+\alpha,v+\beta,w+\gamma)\frac{d\alpha\,d\beta\,d\gamma}{\sigma^2}\\ (62)\qquad&=\frac{1}{2\pi^2}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\alpha,\beta,\gamma)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma}{(u-\alpha)^2+(v-\beta)^2+(w-\gamma)^2}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty M_\sigma(\varphi)\,d\sigma.\end{aligned}$$

In der letzten Gestalt bedeutet $M_\sigma(\varphi)$ den Mittelwert der Funktion φ auf der Kugel vom Radius σ um den Punkt (u,v,w) im Impulsraum. Behält man l zunächst noch bei, so tritt im Ausdruck (62) der Summand

---

[16] E. Schrödinger, Abhandlungen zu Wellenmechanik, 1927, S. 164, = Ann. d. Phys. (4) 81, 134, 1926. P.S.Epstein, Two Remarks on Schrödinger's Quantum Theory, Proc. Am. Nat. Acad. Sciences, 13, 94, 1927.

l^2 im Nenner hinzu. Die Funktion, die sich so ergibt, ist im vierdimensionalen Raum mit den Koordinaten u, v, w, l diejenige Potentialfunktion $\mathcal{F}$, welche aus der Massenbelegung der "Ebene" $l = 0$ mit der Dichte φ entsteht. $\underline{P}\varphi$ sind ihre Werte auf der belegten Ebene. Da offenbar

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha\, d\beta\, d\gamma}{r_{10}^2\, r_{20}^2} = \frac{\text{const.}}{r_{12}}$$

ist, wo 1, 2, $0 = (\alpha\beta\gamma)$ drei Punkte im Impulsraum bedeuten und r_{10}, r_{20}, r_{12} ihre gegenseitigen Abstände, liefert die Wiederholung ~~von~~ $\underline{P}^2$ von $\underline{P}$ den Prozess, der im dreidimensionalen Impulsraum φ überführt in die durch die Raumbelegung φ erzeugte Potentialfunktion Φ. Es gilt bekanntlich

NB: Unterscheide klein φ und groß Φ!

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial w^2} = \varphi.$$

Man wird nach Kugelfunktionen zerspalten. Benutzt man die oben erwähnte vierdimensionale harmonische Funktion $\mathcal{F}$ und macht den Ansatz

$$\mathcal{F} = Y_n \cdot \mathcal{F}(s, l),$$

in welchem Y_n eine nur von der Richtung $u : v : w$ abhängige Kugelfunktion n^{ter} Ordnung sein soll, so genügt im oberen Halbraum $l > 0$ der nur von s und l abhängige Faktor der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(s^2 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s}\right) + s^2 \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial l^2} = n(n+1)\mathcal{F},$$

und die Operation $\underline{P}$ bedeutet den Uebergang von den Randwerten ihrer normalen Ableitung zu ihren eigenen Randwerten. Vielleicht ist es bequemer, statt $\mathcal{F}(s, l)$ die Funktion $s\,\mathcal{F}(s, l) = \mathcal{F}^*(s, l)$ zu benutzen. Für sie lautet die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}^*}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}^*}{\partial l^2} = \frac{n(n+1)}{s^2}\mathcal{F}^*.$$

$\mathcal{F}^*$ ist eine Funktion in der oberen Hälfte $l > 0$ einer (s, l)-Ebene, welche bei Spiegelung an der l-Achse ungerade ist. - Indem man in (62) den Faktor $1/R^2$,

$$R^2 = (u-\alpha)^2 + (v-\beta)^2 + (w-\gamma)^2 = s^2 + \sigma^2 - 2s\sigma\cos\vartheta$$

nach Kugelfunktionen $P_n(\cos\vartheta)$ entwickelt:

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{4s\sigma}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\mathcal{L}_n \cdot P_n(\cos\vartheta),$$

erhält man, wenn analog

$$\varphi = \sum Y_n \cdot s\varphi^*(s)$$

angesetzt wird, als Ausdruck der Operation $\underline{P}$ an solchen Funktionen die Formel

$$\varphi^*(s) \rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \mathcal{L}_n\left(\frac{s^2+\sigma^2}{2s\sigma}\right) \cdot \varphi^*(\sigma)\, d\sigma,$$

$$\mathfrak{L}_n(t) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(x)\,dx}{t-x}.$$

Wenn das Einkörperproblem vorliegt, wird man, auf die Gefahr hin, eine Serie falscher Eigenwerte einzuschmuggeln, P iterieren und dadurch zu einer reinen Differentialgleichung kommen. Für das nichtrelativistische Wasserstoffatom sind die Eigenfunktionen $\varphi_n(u, v, w)$, die durch die Fouriersche Transformation aus den Schrödingerschen Eigenfunktionen $\psi_n(x, y, z)$, den Laguerreschen Polynomen, hervorgehen, in meiner Dissertation angegeben.[17] Sie können auch sehr schön direkt auf dem hier skizzierten Wege gewonnen werden. Im Mehrkörper-Problem versagt die Iterationsmethode.

Coulombsche Kräfte zwischen mehreren beweglichen Teilchen. Dem reziproken Abstand $\frac{1}{r_{12}}$ zweier Teilchen 1 und 2 entspricht im Gebiet der Impulsfunktionen $\varphi(u_1, v_1, w_1;\ u_2, v_2, w_2)$, wie man auf die gleiche Weise erkennt, die Abbildung

$$\varphi \to \varphi' = \frac{1}{2\pi^2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u_1+\alpha,\ v_1+\beta,\ w_1+\gamma;\ u_2+\alpha,\ v_2+\beta,\ w_2+\gamma)\ \frac{d\alpha\, d\beta\, d\gamma}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}.$$

Die Bezeichnung soll natürlich nicht ausschliessen, dass φ auch von den Impulsen der übrigen Teilchen abhängt, diese werden aber von der Transformation nicht mitbetroffen.

Mathematischer Anhang.

Beweis des Satzes von der Hauptachsentransformation einer unitären Abbildung. Ist die unitäre Abbildung $A = \|a_{ik}\|$ gegeben, so bestimmen wir einen Vektor $\mathfrak{x} \neq 0$, der durch A in ein Multiplum von sich selber übergeht:

$$(63)\qquad \mathfrak{x}A = \varepsilon\mathfrak{x} \qquad \text{oder} \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\, x_i = \varepsilon\, x_k.$$

Wählen wir ε als eine Wurzel der Säkulargleichung

$$\det.(\varepsilon\mathbf{1} - A) = 0,$$

so existiert tatsächlich ein derartiger Vektor $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1$. Indem wir seinen Betrag zu 1 normieren, ergänzen wir ihn durch weitere $n-1$ Vektoren $\mathfrak{x}_2, \cdots, \mathfrak{x}_n$ zu einem normalen Koordinatensystem. Da in ihm die Gleichungen (63) für $\mathfrak{x}_1$, d.i. für $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ \cdots,\ x_n = 0$ erfüllt sind, ist jetzt

$$a_{11} = \varepsilon, \quad a_{12} = \cdots = a_{1n} = 0.$$

---

[17] Math. Ann. 66, S. 307 - 309, 317 - 324 (1908).

Die Quadratsumme der absoluten Beträge der ersten Koeffizientenzeile in A muss 1 sein, darum ist $|\varepsilon| = 1$. Aber auch die absolute Quadratsumme der Glieder, welche in der ersten Spalte stehen, ist = 1, und das liefert

$$1 + |a_{21}|^2 + \cdots + |a_{n1}|^2 = 1, \qquad a_{21} = \cdots = a_{n1} = 0.$$

Das ist der entscheidende Schluss. Die Matrix A zerfällt nunmehr in der aus dem Schema ersichtlichen Weise. Durch Induktion inbezug auf die Dimensionszahl n ist damit der Beweis vollendet.

$$\begin{Vmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

Liegt die unitäre Abbildung A in der Normalform vor, mit den Termen a_i in der Hauptdiagonale, so genügen der Gleichung (63) offenbar alle und nur diejenigen Vektoren, welche sich aus Grundvektoren e_i zusammensetzen, für die $a_i = \varepsilon$ ist. Daraus geht hervor, dass die verschiedenen Eigenwerte $a', a'', \ldots$ mit ihrer Vielfachheit und die zugehörigen Teilräume $\mathfrak{R}(a'), \mathfrak{R}(a''), \cdots,$ von denen in § 1 die Rede war, eindeutig durch A bestimmt sind.

Wenn $A = \|a_{ik}\|$, $B = \|b_{ik}\|$ vertauschbare unitäre Matrizen sind, lassen sie sich simultan auf Hauptachsen transformieren. Beweis: A kann sogleich in der Normalform angenommen werden, in welcher nur Glieder a_i in der Hauptdiagonale auftreten. Die Vertauschbarkeits-Forderung besagt

$$(a_i - a_k)\, b_{ik} = 0. \tag{64}$$

Wir teilen die Indizes in Klassen, indem i und k in dieselbe Klasse ~~gehören~~ kommen, wenn $a_i = a_k$ ist. Die Gleichung (64) zeigt, dass $b_{ik} = 0$ ist, wenn die Indizes i und k verschiedenen Klassen angehören; d.h. B zerfällt in der gleichen Weise in Teilmatrizen: $B', B'', \ldots,$ die sich längs der Hauptdiagonale aneinander reihen, wie sich die a_i in Klassen untereinander gleicher aufteilen: $a', a'', \cdots$. Die Abbildung B lässt die zu den Eigenwerten $a', a'', \cdots$ gehörigen Teilräume $\mathfrak{R}(a'), \mathfrak{R}(a''), \cdots$ einzeln invariant. Die Normalform von A wird nicht zerstört, wenn die Variablen, welche der gleichen Klasse angehören, untereinander unitär transformiert werden. Durch geeignete Wahl dieser einzelnen unitären Transformationen in den Räumen $\mathfrak{R}(a'), \mathfrak{R}(a''), \cdots$ können aber $B', B'', \cdots$ auf die Normalform gebracht werden. - Das Verfahren ist ohne weiteres auf irgend eine kommutative Gesamtheit von

unitären Matrizen zu übertragen.

Der Satz von der Hauptachsentransformation der Hermiteschen Formen ist ein Grenzfall des soeben bewiesenen, kann aber auch nach der gleichen Methode direkt abgeleitet werden. Der Schluss von

$$a_{12} = \cdots = a_{1n} = 0 \quad \text{auf} \quad a_{21} = \cdots = a_{n1} = 0$$

geschieht hier vermöge der Symmetriebedingung $a_{ki} = \bar{a}_{ik}$.

Beweis des Satzes, daß eine mit der irreduziblen Gesamtheit $\mathfrak{U}$ unitärer Abbildungen vertauschbare unitäre Abbildung A notwendig $= \varepsilon 1$ ist. Man führe dasjenige normale Koordinatensystem ein, in welchem A mit den Eigenwerten a_i zur Diagonalmatrix wird. Sind nicht alle a_i einander gleich, so zerfallen die sämtlichen Matrizen U der vorgegebenen Gesamtheit in der gleichen Weise, wie die a_i in Klassen untereinander gleicher zerfallen; A bewirkt so einen simultanen Zerfall aller Matrizen des Systems $\mathfrak{U}$.

Den Satz über die linearen Transformationen einer nicht-ausgearteten schiefsymmetrischen reellen Bilinearform

$$(65) \qquad \sum_{i,k=1}^{f} c_{ik}\, x_i\, y_k \qquad (c_{ki} = -c_{ik})$$

beweist man so. Man fasse das einzelne Zahlsystem $(x_1, x_2, \cdots, x_f)$ als einen Vektor $\mathfrak{x}$ auf und bezeichne (65) als das schiefe Produkt $[\mathfrak{x}\mathfrak{y}]$ der beiden Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y} = (y_i)$. Man wähle einen Vektor $\mathfrak{e}_1 \neq 0$. Nach Voraussetzung ist $[\mathfrak{e}_1 \mathfrak{x}]$ nicht identisch in $\mathfrak{x}$ gleich 0; ich kann also einen zweiten Vektor $\mathfrak{e}_2$ so finden, dass $[\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2] = 1$ ist. Die simultan zu erfüllenden Gleichungen

$$[\mathfrak{e}_1 \mathfrak{x}] = 0, \qquad [\mathfrak{e}_2 \mathfrak{x}] = 0$$

haben mindestens $f-2$ linear unabhängige Lösungen $\mathfrak{e}_3, \cdots, \mathfrak{e}_f$. Auch zwischen ihnen und $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$ findet keine lineare Relation statt. Denn ist

$$\mathfrak{x} = \xi_1 \mathfrak{e}_1 + \xi_2 \mathfrak{e}_2 + \xi_3 \mathfrak{e}_3 + \cdots + \xi_f \mathfrak{e}_f = 0,$$

so folgt durch Bildung der beiden schiefen Produkte $[\mathfrak{e}_1 \mathfrak{x}] = \xi_2$, $[\mathfrak{e}_2 \mathfrak{x}] = -\xi_1$, dass $\xi_1 = \xi_2 = 0$ wird. Man kann also $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \cdots, \mathfrak{e}_f$ als Koordinatensystem, als Vektorenbasis verwenden. In den darauf bezüglichen Komponenten ξ_i, η_i der beiden Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ laute das schiefe Produkt

$$[\mathfrak{x}\mathfrak{y}] = \sum_{i,k=1}^{f} \gamma_{ik}\, \xi_i\, \eta_k .$$

Gemäss der Bestimmung der Grundvektoren gilt für die Koeffizienten $\gamma_{ik} = [\mathfrak{e}_i \mathfrak{e}_k]$:

$$\gamma_{11} = 0,\ \gamma_{12} = 1;\ \gamma_{13} = 0,\ \cdots,\ \gamma_{1f} = 0,$$
$$\gamma_{21} = -1,\ \gamma_{22} = 0;\ \gamma_{23} = 0,\ \cdots,\ \gamma_{2f} = 0.$$

Wegen der schiefen Symmetrie sind infolgedessen auch alle γ_{i1}, γ_{i2} mit $i = 3, \cdots, f$ gleich 0; und die Matrix der γ_{ik} zerfällt in das zweireihige Quadrat $\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$ und eine $(f-2)$-dimensionale schiefsymmetrische Matrix. Durch Induktion inbezug auf die Dimensionszahl f ergibt sich der behauptete Satz.

Zusätze und Korrekturen zu dem Manuskript von H. WEYL, Quantenmechanik

und Gruppentheorie.

Seite 1 , hinter dem Titel in petit-Druck einschieben:

Inhaltsverzeichnis: Einleitung und Zusammenfassung.

I. Teil. Bedeutung der Repräsentation von physikalischen Grössen durch Hermitesche Formen.
§1. Mathematische Grundbegriffe, die Hermiteschen Formen betreffend.
§2. Der physikalische Begriff des reinen Falls.
§3. Die physikalische Bedeutung der repräsentierenden Hermiteschen Form.
§4. Statistik der Gemenge.
II. Teil. Kinematik als Gruppe.
§5. Ueber Gruppen und ihre unitären Darstellungen.
§6. Uebertragung auf kontinuierliche Gruppen.
§7. Ersatz der kanonischen Variablen durch die Gruppe. Das Elektron.
§8. Uebergang zu Schrödingers Wellentheorie.
III. Teil. Das dynamische Problem.
§9. Das Gesetz der zeitlichen Veränderung. Die Zeitgesamtheit.
§10. Kinetische Energie und Coulombsche Kraft in der relativistischen Quantenmechanik.
Mathematischer Anhang.

Seite 2, Zeile 1 und 2 von oben. Statt:

tigen allgemeinen Definition der kanonischen Variablen. Ein Versuch in dieser Richtung ist von Herrn Jordan unternommen worden.[2] Doch enthalten

der korrigierte Text:

tigen Definition der kanonischen Variablen. Ein Versuch in dieser Richtung, der das Problem erst in seiner wahren Allgemeinheit hervortreten liess, ist von Herrn Jordan unternommen worden[2]. Doch enthalten

Seite 9, Zeile 14 - 11 von unten. Statt:

der Term

$$(9) \qquad \mu(\mathfrak{H}_x\sigma_x + \mathfrak{H}_y\sigma_y + \mathfrak{H}_z\sigma_z),$$

dessen Faktor $\mu = \frac{eh}{4\pi mc}$ das Bohr'sche Magneton ist (e Ladung, m Masse des Elektrons, c Lichtgeschwindigkeit). Wieder ist es nötig, den

der korrigierte Text:

die Hälfte des Terms

$$(9) \qquad \mu(\mathfrak{H}_x\sigma_x + \mathfrak{H}_y\sigma_y + \mathfrak{H}_z\sigma_z),$$

dessen Faktor $\mu = \frac{eh}{4\pi mc}$ das Bohr'sche Magneton ist (e Ladung, m Masse des Elektrons, c Lichtgeschwindigkeit). Der spektroskopische Erfolg der Annahme von Goudsmit und Uhlenbeck beruht bekanntlich darauf, dass für das Elektron der Ausdruck (9) ohne den Faktor $\frac{1}{2}$ als gültig betrachtet wird. Wieder ist es nötig, den

24.10.26.

~~betrachtet wird. Wieder ist es nötig, den~~

Seite 8, Einfügung einer Fussnote zu Zeile 11:

beiden Teilstrahlen bekunden.*) Hätten wir am Anfang statt x eine andere

---

*) Obwohl also P_x noch wieder zerlegt werden kann, sind doch die so entstehenden Teilstrahlen nicht homogener als P_x selbst. Das ist genau wie bei einem Lichtstrahl, der durch zwei gegeneinander verdrehte Nikols hindurchgegangen ist: er ist von derselben Beschaffenheit wie Licht, das nur durch den zweiten Nikol hindurchging.

Seite 29, Zeile 4 von unten, bis Seite 30, 1. Zeile von oben. Statt:

nung 2 ist. Die korrespondierende zweidimensionale Drehung lautet, auf Hauptachsen transformiert:

$$A \simeq \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix},$$

die Eigenwerte sind entgegengesetzt gleich. Wählen wir ein bestimmtes

der korrigierte Text:

nung 2 ist. Die beiden Eigenwerte der korrespondierenden zweidimensionalen Matrix A sind daher entgegengesetzt gleich. Wählen wir ein bestimmtes

Seite 33, Zeile 15 - 19 von oben. Statt:

$r, r+1, \cdots$ durchläuft. Mit andern Worten: q ist der Werte $k\xi$ fähig, ihr Wertbereich ein kontinuierliches zusammenhängendes Intervall, das nach einer oder nach beiden Seiten ins Unendliche sich erstreckt. (Unsere Anordnung der Variablen x_k bedeutete also, dass wir die Werte der Variablen q in ihrer natürlichen Grössenfolge durchlaufen.) Dar-

der korrigierte Text:

durchläuft. Mit andern Worten: die Grösse q ist der Werte $k\xi$ fähig, ihr Wertbereich das zusammenhängende Kontinuum der reellen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$. (Dabei ist k freilich mod. n, $k\xi$ mod. $n\xi$ zu verstehen; aber $n\xi$ ist ein Multiplum von $\frac{2\pi}{\gamma}$, ~~darum~~ folglich im Limes unendlich gross.) Dar-

Herrn

Dr. A. Weiner

Oberdirektor der mährischen Elektrizitätswerke.

Tschechoslowakei.

Brünn.

Neugasse 36.

ab: PROF. DR. H. WEYL
ZÜRICH, BOLLEYSTR. 52
Göttingen · Grüner Weg 3/5.

Göttingen. Grüner Weg 3/5.
d. 19. Januar 27.

Sehr geehrter Herr Doktor.

Haben Sie besten Dank für Ihren liebenswürdigen Brief, der mich leider mit grosser Verspätung hier erreichte, wo ich im Augenblick als Gastprofessor thätig bin.

Zu meinem Bedauern muss ich Ihnen mittheilen, dass ich sehr wenig sorgsam mit meinen Manuskripten umgehe und das meines Nauheimer Vortrags, wie die meisten andern, gleich nach der Drucklegung vernichtet habe. Es wäre möglich, dass in meinem Züricher Schreibtisch durch Zufall noch ein oder das andere Manuskript übrig geblieben ist; aber ich glaube, Sie werden dafür, da ich von der Maschinen-Abschrift eine ganz unleserliche Schattenschrift benutze, kaum Interesse haben. Es könnte höchstens sein, dass aus ganz alter Vor-schreibmaschinen-Zeit ein ordentliches handgeschriebenes Exemplar übriggeblieben ist. Ich werde gern, wenn ich Anfang Mai wieder in

Zürich bin, einmal nachsehen, ob ich etwas finde, was für Sie einiges Interesse haben kann, und Ihnen dann Nachricht geben.

Mit verbindlichen Grüssen in ausgezeichneter Hochachtung

Ihr ergebener

H. Weyl.

DSI

Eingeschriebene Geschäftspapiere.

R Zürich 13 Oberstrass
121

ZÜRICH 13
16. I. 28. 15
(OBERSTRASS)

Herrn

CLA PROSTO

Dr. A. Weiner

CLA PROSTO

(Generaldirektor der westmährischen Elektrizitätswerke)

Abs.: Prof. Dr. H. Weyl
Zürich
Bolleystr. 52

CELNÍ ÚŘAD BRNO

Brünn

Tschechoslowakei

Neugasse 36

PROFESSOR DR. H. WEYL

ZÜRICH Bolleystrasse 52.

d. 15. I. 1928.

Sehr geehrter Herr Doktor.

Es tut mir leid, dass ich Ihre Bitte um das Manuskript einer meiner Arbeiten so spät und ungenügend erfülle. Ich schrieb Ihnen ja schon, dass ich nach vollendeter Drucklegung wenig pietätvoll mit meinen stenographischen Entwürfen verfahre. Vielleicht interessiert es Sie, die mit gleicher Post abgehenden beiden Manuskripte, den stenographischen Entwurf und die Maschinen-Reinschrift einer soeben publizierten Arbeit zur Quantentheorie zu besitzen. Es ist mir wirklich unmöglich, Ihnen etwas Besseres zu senden.

Mit verbindlichem Gruss

ergebenst

H. Weyl

AUTOGRAPHE

de

Weyl

Hermann

OBSERVATIONS

1.) L.a.s. (D) 1½ p. 4° Göttingen, 19.V.1927 teilt mit, daß er nach Veröffentlichung mit seinen Manuskripten wenig pietätvoll umgehe, von Maschinenschrift aus stenographische Arbeitsentwürfe benutze und verbrenne, ein Manuskr. nach seiner Rückkehr nach Zürich in seinem Schreibtisch zu suchen. Mit eigh. Briefumschlag.

2) Ls. (D) ½ p. 4° (Maschinenschr.) Zürich 15.I.28 sendet gleichzeitig Manuskript (stenogr.) mit Maschinenabschrift seiner Arbeit „Quantenmechanik u. Gruppentheorie“.

3.) M.a. 47 p. 4° Stenographisches Manuskript der in der „Zeitschrift für Physik“ Bd 46 Heft 1 u. 2 (1927) veröffentlichten Arbeit „Quantenmechanik und Gruppentheorie“. Dazu 48 p. Folio Maschinenabschrift der Arbeit mit handschriftlichen Formeln u. Korrekturen. Beigelegt Abdruck der Arbeit in der Zeitschrift für Physik.

1./

W e y l Hermann, Dr. phil.1908, Göttingen,- stud.04-08 Göttingen & München, 10 Privado c.Göttingen seit 13 Prof.Math.Techn.Hochschule Zürich.-

geb.1885, Nov.9, Elmshorn, /Eig.Mitt/.

Die Idee der Riemannschen Fläche 2.Aufl.170 S.Leipzig 1923.- D.Kontinuum ktir.Untersuchgn.üb.d.Grundlagen d.Analysis, 83 S.,Leipzig 18.- Riemann, Ueb.d.Hypothesen, welche d.Geometrie zugrunde liegen, 3.Aufl. 47, S Berlin 23.- Raum -Zeit- Materie., Vorlesg.üb.allgem.Relativitätstheorie, 5 Aufl.360 S, Berlin 22/ franzÜbersetzg.290 S.Paris 22.engl. 330 S.London 22/.-

Ann.d.Physik. Z.Gravitatstheorie 29 S./54,1917/.-,Eine neue Erweiterung d.Relativitätstheorie, 33 S.- Bemerkg.üb.d.axialsymetr.Lösgn.d. Einsteinschen Gravitatsgleichgn., 4 S./59,19/.- Ausbreitg.elektromagnet.Wellen üb.einem ebenen Leiter, 20 S./60,19/.- Erwiderg. auf Sommerfelds Bermekg.üb.d.Ausbreitg. der Wellen in der drahtlosen Telegraphie 3 S./62,20/.-Feld & Materie 23 S. /65,21/.-

Berlin, Akad.S.Ber.D.Starrheit

AUTOGRAPHE

de

Weyl

Hermann

OBSERVATIONS

2./

d. Eiflächen und Convexen Polyeder, 17 S.- /1917/.-Gravitat.& Elektrizität 16 S/18/.-

Göttingen Ges. d. Wiss. Nachr. Gewöhnl. lineare Diff. Gleichgn. m. singulä Stellen & ihre Eigenfunktn. 27 & 26 S./1909 & 10/.- Asymptot. Verteilg. d. Eigenwerte, 8 S/11/.-Problem aus d. Gebiet d. Diophant. Approximatm. 11 S.//14/.- Z. Infinitesimalgeometrie Einordng. d. projektiven & d. konformen Auffassung 14 S.- D. Hardy-Littlewoodschen Untersuchgn. zu Waringschen Problem, 4 S/21/.-

Jahreber. d. Deut. Math. Vereinigg. 2 Bemerkungn. üb. d. Fouriersche Integraltheorem, 13 & 1 S./20,1911/.- Strenge Begründgn. der Charakteristikentheorie auf zweiseitigen Flächen, 14 S./25,17/.- D. curculus vitiosus in. d. heutigen Analysis, 7 S. /28,19/- D. Relativitätstheorie auf d. Naturforschersmmlg. in Bad Nauheim, 13 S./.-D. Raumproblem. 17 S./31,22/.-

Journ. f. d. reine u. angew. Mathm.- Abhängigkeit d. Eigenschwinggn. e. Membran v. deren Begrenzg.,11S.- Spektrum d. Holraumstrahlg. 19 S./141, 1912/.- Randwertaufgabe d. Strahlungstheorie & asymptot. Spektralgesetze 26, S./143,13/.-

l. Eneignement mathém.-Aplicat. de

3./

la théorie d. nombres á la mécanique statist.& a la théorie d. perturbats.,13 S/16.1914/.-

Mathemat. Ann.- Konvergenz v. Reihen, die nach Orthogonalfunktn. fortschreiten/m. F. Jerosch/,14 S. /66,1908/.- Desgl. 21 S./67,09/.- Singuläre Integralglchgn. 52 S.- /66,09/.- Gewöhnl. Diff. Gleichgn. m. Singularitäten & d. zugehör. Entwicklgn. willkürl. Funktn. 50 S/68,10/. Asymptot. Verteilgsgesetz der Eigenwerte linearer partielles Diff. Gleichgn. 39 S/71,12/.- D. Gleichverteilg. v. Zahlen mod. Eins, 40 S,/77, 16/.-

Mathem. Naturwiss. Blätter.- D. Definitn. d. math. Grundbegriffe 7 S. /7,1910/.-

Mathem. Zeitschrf. Reine Infinitesimalgeomtrie , 38 S/2.1918/.- D. neue Grundlagenkrise d. Math. 41 S.- Z. Abschätzg. von /1 ti/14 S.10, 21/.- D. Einzigartigkeit d. Pythagoreischen Massbestimmg. 33 S.-Z. Infinitesimalgeometrie .- p. dimensionale Fläche im n diemensionalen Raum 7 S/12,22/.- Zusatz zu R. Bach, Neue Lösgn. der Einsteinschen Gravitsgleichgn. Explizite Aufstellg. stat. axialsymetr. Felder, 4 S./13,22./-

Nature.- Electricity & gravitat 3 S./106,1921/.-

AUTOGRAPHE

de

Weyl

Hermann

OBSERVATIONS

1.) [illegible]

2.) [illegible]

3.) [illegible]

4./

Palermo. Circ.matem.Rend.- Beschränkte quadrat.Formen, deren Differenz volstetig ist, 20 & 1 S./27, 1909/- D.Gibbsche Erscheing.in d. Theorie d.Kugelfunktn.16 S./29,10/.- D.Gibbssche Erscheingn.und verwandte Konvergenzphänomene, 31 S. /30,10/.- Kovergenzcharakter d. Laplaceschen Reihe in d.Umgebg.eines Windgspunktes, 14 S./32,11/.- D.asymptot.Verteilgsgesetz d.Eigenschwiggn.eines beliebig gestalteten Körpers ,50 S/39,15/.-

Physik.Zeitschrf.D.stat.kugelsymmetr.Lösgn.v.Einstein kosmolog. Gravitatsgleichgn./4 S./20,1919/- Elektriz.& Gravitat.2 S./21,/20/.- D.physikal.Grundlagen d.erweiterten Relativitätstheorie, 8 S./22,21/.-

Schweiz, Bauzeitg.D.Einsteinsche Relativitätstheorie 15 S/1921/.

Scheiz.Medizin.Wochenschr. D.Verhält.d.kausalen zur statist.Betrachtungsweise in d.Physik, 10 S, /1920/.-

Zürich, Nat.Ges.Wierteljahrsschr Bestimmg.einer geschloss.konvexen Fläche durch ihr Linienelement, 33 S./61,1916/.- Bemerkgn.zum Begriff d.Differentialquotienten 7 S/62,17/.-